VIII Congreso de Ingeniería de Organización
Leganés, 9 y 10 de septiembre de 2004

Revisión periódica en tiendas con un elevado número de referencias de lento movimiento

Manuel Cardós, Eduardo Vicens, Cristóbal Miralles

Departamento de Organización de Empresas. Universidad Politécnica de Valencia. Camino de Vera s/n. 46071 Valencia. mcardos@omp.upv.es, evicens@omp.upv.es, cmiralles@omp.upv.es

Resumen

Este documento analiza la aplicación del modelo de revisión periódica a las tiendas minoristas de productos de consumo, con especial atención a la problemática de los artículos de lento movimiento. Para ello se analiza las características de la demanda, se desarrolla su función de probabilidades acumulada, así como expresiones para el cálculo del nivel de servicio al cliente y el nivel medio de stock. Adicionalmente se realizan algunas consideraciones respecto a las condiciones habitualmente utilizadas para la fijación de los parámetros de la política de revisión periódica.

Palabras clave: revisión periódica, distribución compuesta, venta minorista

1. Características de la demanda

El comportamiento de la demanda varía enormemente en diferentes sectores de actividad pero, con pequeñas variaciones, en las cadenas de tiendas de productos de consumo: (a) existe un elevado número de artículos en la tienda, a veces incluso decenas de miles; (b) un pequeño porcentaje de los artículos presenta demanda en todos los períodos, pero la mayoría no tiene demanda durante un elevado porcentaje de los períodos; (c) la estrategia de negocio incluye un elevado nivel de servicio a los clientes; (d) los clientes sólo compran lo que encuentran en la tienda, pero ocasionalmente pueden hacer un encargo de un artículo de lento movimiento si el plazo de servicio es corto; y (e) los costes de almacenamiento son elevados debido al deterioro, los robos y la obsolescencia.

Adicionalmente, la demanda suele ser discreta y, para la mayoría de los artículos, con valores muy reducidos tanto de la tasa de demanda como de la frecuencia con que se presenta. Esto último supone una dificultad extra porque no se puede aproximar con una función de probabilidades continua y fácil de utilizar como la normal. Precisamente la hipótesis de normalidad es la más habitual porque permite un desarrollo relativamente simple de las relaciones entre los parámetros de la política de gestión de existencias y sus resultados.

2. Función de distribución de la demanda

La presencia de demanda en un período puede representarse mediante una variable de Bernoulli con probabilidad p, mientras que la demanda no nula en un período se puede ajustar mediante una distribución de Poisson con tasa de demanda μ. Bajo la hipótesis de independencia entre períodos, la función de distribución de la demanda acumulada D_t en t períodos consecutivos es:

$$P(D_t \le z) = \sum_{n=0}^{\infty} P(D_n \le z \mid n) \cdot P(n) \tag{1}$$

donde n es el número de períodos con demanda no nula en t períodos consecutivos. Teniendo en cuenta que la demanda total D_n en $n \le t$ períodos con demanda no nula es un proceso de Poisson de parámetro $n\mu$, se deduce que

$$P(D_n \le z \mid n) = \sum_{\nu=0}^{z} P(D_n = \nu \mid n) = \sum_{\nu=0}^{z} \frac{e^{-n\mu}(n\mu)^{\nu}}{\nu!} = F_{PS}(n\mu, z) \tag{2}$$

donde $F_{PS}(\cdot)$ es la función de distribución de Poisson. Por otra parte, la probabilidad de que haya exactamente $n \le t$ períodos con demanda no nula viene dada por la función de probabilidad binomial $f_B(\cdot)$

$$P(n) = \binom{t}{n} p^n (1-p)^{t-n} = f_B(t, n, p) \tag{3}$$

En consecuencia, la función de distribución de la demanda total acumulada en t períodos consecutivos viene expresada por

$$F_t(z) = \sum_{n=0}^{t} P(D_n \le z \mid n) \cdot P(n) = \sum_{n=0}^{t} F_{PS}(n\mu, z) f_B(t, n, p) = \sum_{n=0}^{t} \sum_{\nu=0}^{z} \frac{e^{-n\mu}(n\mu)^{\nu}}{\nu!} \binom{t}{n} p^n (1-p)^{t-n} \tag{4}$$

Esta función de distribución compuesta muestra algunas propiedades de gran utilidad: (a) tiende a cero cuando $p \to 0$ y $z > 0$; (b) se convierte en una Poisson cuando $p \to 1$; (c) siendo una Poisson, converge a una variable Normal cuando la tasa de demanda es suficientemente alta; y (d) los datos p y μ necesarios para cada artículo pueden obtenerse con facilidad en cualquier cadena de tiendas sin utilizar procedimientos estadísticos complejos.

3. La política de gestión de existencias (T, S)

Las políticas para la gestión de existencias basadas en la revisión periódica son muy populares para la gestión del inventario de las cadenas de tiendas porque: (a) son fáciles reutilizar por los responsables e las tiendas; (b) provocan órdenes de reaprovisionamiento a intervalos regulares, lo que facilita la coordinación de actividades entre el centro de distribución, el transporte y las tiendas; (c) reduce el número de repartos a las tiendas porque se aprovecha cada vez que un vehículo se envía a una tienda para reaprovisionar todos sus artículos.

La política de revisión periódica (T, S) lanza órdenes de reaprovisionamiento cada T períodos por la diferencia entre el stock existente y un nivel prefijado S denominado stock máximo (aunque realmente no lo es), nivel de referencia o *order up to level* (OUL). La orden de reaprovisionamiento se recibe r períodos después de lanzada, por lo cual se incorpora entonces al stock; sin embargo es en el período r+1 cuando está disponible para satisfacer la demanda. Supondremos en adelante que $r \le T$ por ser la situación más frecuente; en caso contrario debe modificarse las expresiones siguientes para incluir el inventario en tránsito existente en el momento en que se revisa en inventario.

La política (T, S) incluye dos parámetros, por lo que hacen falta dos condiciones para su determinación que se suelen elegir entre las siguientes: (a) volumen físico del inventario menor que la capacidad de almacenamiento de la tienda; (b) valor del inventario por debajo de un valor establecido con objeto de limitar las necesidades de fondos para la financiación del inventario en las tiendas; (c) frecuencia de reparto preestablecida, eventualmente por estar limitado el número de vehículos disponibles o para asegurar en plazo aceptable de entrega de los encargos de los clientes; (d) cumplimiento del nivel de servicio al cliente establecido como objetivo para cada artículo. Para poder aplicar estas condiciones u otras análogas, se desarrolla a continuación procedimientos para el cálculo del nivel de servicio y el inventario medio.

4. Estimación del servicio al cliente

Una de las métricas más habituales para medir el nivel de servicio al cliente es el nivel de servicio de ciclo (CSL) que se define como la fracción de los ciclos de reaprovisionamiento en que se satisface toda la demanda de los clientes. Es conveniente destacar que esta definición exige que haya demanda durante el ciclo de reaprovisionamiento, lo cual no siempre ocurre cuando el artículo es de lento movimiento. Por ello, el nivel de servicio de ciclo (CSL) será la probabilidad de que el stock disponible pueda satisfacer la demanda acumulada no nula de los siguientes T+r períodos. Aplicando el teorema de Bayes

$$\mathrm{CSL} = \mathrm{P}(\mathrm{D}_{\mathrm{T+r}} \leq \mathrm{S} \mid \mathrm{D}_{\mathrm{T}} > 0) = \frac{\mathrm{F}_{\mathrm{T+r}}(\mathrm{S}) - \mathrm{F}_{\mathrm{T}}(0)}{1 - \mathrm{F}_{\mathrm{T}}(0)} = G(S) \tag{5}$$

En consecuencia,

$$\mathrm{S} = G^{-1}(CSL) \tag{6}$$

En la Tabla 1 se presenta un ejemplo de cálculo de S.

Tabla 1. Ejemplo de cálculo de S para diferentes valores de p y μ (T=5, r=1 y CSL=95%), valores expresados en unidades y períodos

	p														
μ	**10^{-6}**	**10^{-3}**	**0,01**	**0,02**	**0,05**	**0,1**	**0,2**	**0,3**	**0,4**	**0,5**	**0,6**	**0,7**	**0,8**	**0,9**	**1,0**
1	3	3	3	3	4	4	5	6	6	7	8	8	9	10	10
2	5	5	5	5	6	6	8	9	11	12	14	15	16	17	18
3	6	6	6	7	7	9	11	13	15	17	19	21	23	24	25
4	8	8	8	8	9	11	14	17	20	23	25	27	29	31	32
5	9	9	9	10	11	14	17	21	25	28	31	33	36	38	39
6	10	10	11	11	13	16	21	25	29	33	36	39	42	44	46
7	12	12	12	13	15	18	24	29	33	38	42	45	48	51	53
8	13	13	14	14	17	21	27	33	38	43	47	51	55	57	60
9	14	14	15	16	19	23	30	37	42	48	53	57	61	64	66
10	15	16	16	17	21	26	33	40	47	53	58	63	67	70	73
15	22	22	23	25	32	37	49	60	69	78	86	93	99	103	106
20	28	28	29	32	42	49	65	79	91	104	114	123	130	135	138

Se ha recurrido a la simulación para comprobar experimentalmente la validez de la fórmula (5) con los valores T=5, r=1, p=0.4, μ =1 y S=6. Para ello se ha realizado 30 experimentos consistentes cada uno de ellos en simular la demanda, la evolución del inventario y las roturas de stock en 10.000 períodos consecutivos. Como se aprecia en la Tabla 2 los resultados experimentales son satisfactorios.

Tabla 2. Comprobación experimental de la fórmula (5), valores expresados en unidades y períodos, 30 experimentos, T=5, r=1 p=0.4, μ=1, S=6

Número experimento	CSL simulado	Número experimento	CSL simulado	Número experimento	CSL simulado
1	0,955	11	0,964	21	0,954
2	0,955	12	0,954	22	0,960
3	0,952	13	0,967	23	0,962
4	0,959	14	0,964	24	0,958
5	0,955	15	0,962	25	0,958
6	0,955	16	0,971	26	0,965
7	0,956	17	0,958	27	0,957
8	0,966	18	0,957	28	0,970
9	0,968	19	0,971	29	0,959
10	0,955	20	0,959	30	0,970

CSL calculado según (5)		**Resultados de la simulación**	
0,956		Media	0,960
		Desv. est.	0,006
Estadístico t	-0,747		
Límite de aceptación $t_{29,\ 95\%/2}$	2,04		

5. Estimación del inventario medio

Para que el inventario alcance el nivel z en el periodo t ≥ r es necesario que la demanda acumulada desde el inicio del ciclo de reaprovisionamiento sea igual a S-z, luego

$$P_t(z) = P(D_t = S - z) = P(D_t \leq S - z) - P(D_t \leq S - z - 1) = F_t(S - z) - F_t(S - z - 1) \qquad t \geq r \qquad (7)$$

Sin embargo, antes de que se reciba la orden de reaprovisionamiento del ciclo, el inventario alcanza el nivel z si la demanda acumulada desde el inicio del ciclo de reaprovisionamiento anterior es S-z, luego análogamente a la expresión anterior

$$\begin{aligned} P_t(z) = P(D_{t+T} = S - z) = P(D_{t+T} \leq S - z) - P(D_{t+T} \leq S - z - 1) = \\ = F_{t+T}(S - z) - F_{t+T}(S - z - 1) \qquad t < r \end{aligned} \qquad (8)$$

Así pues, el inventario medio IM lo largo del ciclo de reaprovisionamiento es

$$IM = \sum_{t=1}^{T} \sum_{z=0}^{\infty} P_t(z)\, z \qquad (9)$$

De forma análoga al experimento anterior, se ha recurrido a la simulación para comprobar la validez de la fórmula (9). Los resultados se muestran en la Tabla 3 y como se puede apreciar son satisfactorios.

Tabla 3. Comprobación experimental de la fórmula (9); valores expresados en unidades y períodos, 30 experimentos, T=5, r=1 p=0.4, μ=1, S=6; se presentan los inventarios medios y las probabilidades de diferentes niveles de stock (desde 0 hasta 6) para cada experimento

	Valores medios simulados por experimento							
Número experimento	Inventario medio	z_0	z_1	z_2	z_3	z_4	z_5	z_6
1	4,798	0,016	0,024	0,048	0,088	0,160	0,205	0,459
2	4,809	0,018	0,024	0,043	0,091	0,153	0,208	0,464
3	4,801	0,015	0,023	0,055	0,087	0,148	0,212	0,461
4	4,800	0,016	0,021	0,048	0,091	0,155	0,223	0,447
5	4,811	0,017	0,022	0,046	0,089	0,155	0,218	0,453
6	4,857	0,017	0,019	0,042	0,084	0,143	0,231	0,464
7	4,802	0,017	0,019	0,051	0,091	0,156	0,208	0,459
8	4,821	0,016	0,022	0,044	0,088	0,157	0,216	0,458
9	4,799	0,016	0,023	0,043	0,086	0,163	0,225	0,444
10	4,810	0,016	0,024	0,043	0,088	0,161	0,218	0,452
11	4,764	0,019	0,025	0,049	0,093	0,152	0,212	0,451
12	4,854	0,017	0,022	0,043	0,087	0,139	0,221	0,471
13	4,830	0,016	0,021	0,042	0,087	0,153	0,224	0,457
14	4,828	0,017	0,020	0,046	0,084	0,157	0,213	0,463
15	4,771	0,016	0,025	0,046	0,096	0,157	0,210	0,449
16	4,796	0,018	0,020	0,053	0,086	0,150	0,220	0,453
17	4,784	0,017	0,025	0,047	0,088	0,155	0,219	0,449
18	4,820	0,017	0,019	0,047	0,091	0,154	0,206	0,466
19	4,798	0,018	0,023	0,046	0,091	0,154	0,209	0,460
20	4,774	0,021	0,025	0,046	0,084	0,155	0,222	0,447
21	4,836	0,016	0,019	0,041	0,094	0,152	0,215	0,462
22	4,785	0,018	0,023	0,050	0,085	0,156	0,221	0,448
23	4,795	0,017	0,024	0,048	0,090	0,150	0,214	0,457
24	4,827	0,016	0,022	0,044	0,088	0,150	0,223	0,458
25	4,811	0,018	0,021	0,045	0,084	0,160	0,218	0,454
26	4,798	0,017	0,022	0,044	0,089	0,163	0,212	0,452
27	4,841	0,017	0,026	0,043	0,075	0,146	0,230	0,463
28	4,839	0,019	0,022	0,040	0,083	0,151	0,217	0,468
29	4,773	0,017	0,018	0,050	0,094	0,162	0,219	0,440
30	4,843	0,016	0,018	0,045	0,091	0,151	0,210	0,469
Calculado según (9)	4,811	0,017	0,022	0,046	0,089	0,155	0,218	0,453
Media	4,809	0,017	0,022	0,046	0,088	0,154	0,217	0,457
Desv. est.	0,025	0,001	0,002	0,003	0,004	0,006	0,007	0,008
Estadístico t	-0,074	0,211	0,080	0,004	-0,226	-0,287	-0,157	0,402

Las fórmulas desarrolladas permiten también estimar la evolución del inventario medio y las probabilidades de los diferentes niveles de inventario a lo largo del ciclo de reaprovisionamiento, como se muestra en la Tabla 4.

Tabla 4. Inventario medio y probabilidades de los diferentes niveles de inventario para cada período del ciclo de reaprovisionamiento; valores expresados en unidades y períodos, 30 experimentos, T=5, r=1 p=0.4, μ=1, S=6

	z	t = 1	t = 2	t = 3	t = 4	t = 5	Ciclo de reaprov.
	0	0,00	0,00	0,01	0,02	0,05	0,02
	1	0,00	0,01	0,02	0,03	0,05	0,02
	2	0,01	0,02	0,04	0,07	0,09	0,05
	3	0,02	0,06	0,09	0,12	0,15	0,09
	4	0,07	0,13	0,17	0,20	0,20	0,16
	5	0,15	0,22	0,25	0,25	0,23	0,22
	6	0,75	0,56	0,42	0,31	0,23	0,45
Inventario medio		5,60	5,20	4,80	4,41	4,03	4,81

6. Resumen y conclusiones

Este documento analiza la política (T, S) para el reaprovisionamiento de tiendas desde un centro de distribución centralizado. En primer lugar se analiza las características de la demanda, en particular la de los artículos de lento movimiento, y se desarrolla un modelo que resulta apropiado para representar la amplia variedad de patrones de demanda que se presentan en la distribución comercial. Además, los datos necesarios para cada artículo son fáciles de obtener, lo cual es importante teniendo en cuanta el alto número de artículos manejados en cada tienda.

A continuación se indican las condiciones más habituales que se suelen emplear para establecer los parámetros de la política de revisión periódica. Para facilitar la aplicación rigurosa de tales condiciones, a partir de los parámetros de la política (T, S) se desarrollan expresiones para el cálculo de dos importantes resultados esperados de la aplicación de la misma: (a) nivel esperado del servicio al cliente; y (b) inventario medio esperado durante el ciclo de reaprovisionamiento. En ambos casos se comprueba mediante simulación la bondad de dichas expresiones.

En consecuencia, este documento proporciona elementos suficientes para la determinación rigurosa de los parámetros de la política (T, S) en presencia de demanda discreta reducida y artículos de lento movimiento.

Referencias

Cardós, M., García, J.P. (2004). *Design of a consumer products retail chain to minimize transportation costs and inventory holding costs*. Thirteen International Working Seminar on Production Economics, Innsbruck.

Chase, R. B., Aquilano, N. J., Jacobs, F. R. (1998). *Production and operations management*. Eight edition. Irwin McGraw-Hill, USA.

Chopra, S., Meindl, P. (2001). *Supply chain management*. Prentice-Hall.

Min, H., Zhou, G. G. (2002). Supply chain modeling: past, present and future. *Computers & Industrial Engineering*, vol. 43, no. 1-2, pp. 231-249.

Peña, D. (1998). *Estadística modelos y métodos*. Segunda edición. Alianza Universidad Textos.