VIII Congreso de Ingeniería de Organización
Leganés, 9 y 10 de septiembre de 2004

Eficiencia económica para problemas con posibilidad de desaparición de unidades productivas

Gabriel Villa Caro, Jesús Racero Moreno, José Manuel García Sánchez y Marcos Calle Suárez

Área de Ingeniería de Organización. Escuela Superior de Ingenieros. Universidad de Sevilla. Avenida de los Descubrimientos, s/n. 41092. Sevilla. gvilla@esi.us.es, jrm@esi.us.es, jmgs@esi.us.es, mcalle@esi.us.es

Resumen

El Análisis por Envoltura de Datos (DEA) es una herramienta matemática no paramétrica para la evaluación de la eficiencia relativa de unidades productivas similares a través de la proyección sobre la frontera eficiente inferida por éstas. Cuando los precios de las entradas y/o salidas son conocidos, el DEA es capaz de medir tanto la ineficiencia técnica como la económica de cada una de las unidades. Aunque usualmente el DEA proyecta a las unidades productivas de forma independiente, se puede también adoptar una perspectiva global proyectando a las unidades de forma que se busquen mejoras globales en la organización, en vez de en cada unidad individualmente. En este artículo se presenta un nuevo modelo DEA que maximiza el beneficio de la organización considerándola como un todo, en un escenario en donde se le permite a la dirección poder cerrar unidades si es conveniente para la mejora de la organización.

Palabras clave: análisis por envoltura de datos, eficiencia económica, desaparición de unidades

1. Introducción

El análisis por envoltura de datos DEA es una metodología que evalúa la eficiencia relativa de un conjunto de unidades productivas comparables entre sí mediante el conocimiento de los recursos que consumen (inputs) y de los productos que generan (outputs). Esto lo consigue considerando un conjunto de puntos de operación eficientes denominados frontera eficiente y que en función de la tecnología considerada pueden ser de retornos de escala constantes (CRS), de retornos de escala variables (VRS) o con tecnología no convexa (FDH). Para un estudio más profundo de la metodología, puede consultárselas siguientes referencias: Cooper et al (2000). Cuando los precios de las entradas y/o salidas son conocidas, DEA proyecta cada unidad ineficiente sobre la frontera de eficiencia económica, utilizando una reducción del coste o un aumento de ingreso o beneficio, ver Färe et al (1994). En cualquier caso, cada unidad productiva es proyectada de forma independiente.

Muchos son los estudios realizados basados en la metodología DEA en donde se ha adoptado una perspectiva organizativa caracterizada por la proyección conjunta de las unidades para buscar metas y objetivos globales, entre los que puede destacarse el modelo de reasignación centralizada propuesto por Lozano et al. (2004). Una interesante posibilidad en esta perspectiva global es el caso en el que algunas unidades pueden ser cerradas si los resultados globales mejoran en tal caso.

En el apartado 2 se presenta un modelo de proyección global de unidades productivas que pueden ser objeto de cierre (desaparición) y en donde se busca la proyección de las unidades que proporcionen el mayor beneficio económico global, conociendo los precios de las entradas y salidas. En dicho modelo se considerará un coste fijo asociado al mantenimiento de una unidad que no desaparece.

Debido a que este modelo puede ser aplicado en el contexto de fusión de organizaciones, en el apartado 3, se discute acerca de anteriores análisis desarrollados en DEA. En el cuarto apartado se introduce una simple ilustración para comprobar la bondad de los resultados numéricos que arroja el modelo propuesto. Por último se incluye un apartado de conclusiones.

2. Modelo de maximización de beneficios

En este apartado se formula un modelo DEA con variables binarias que resuelve el problema descrito en el apartado anterior para la tecnología VRS (1). Así, sean:

n	número de unidades productivas
m	número de entradas
p	número de salidas
x_{ij}	cantidad de entrada i consumida por la unidad j
y_{kj}	cantidad de salida k consumida por la unidad j
I_g	subconjunto de entradas que son adquiridas de forma global por la organización
I_l	subconjunto de entradas que son adquiridas de forma local por cada unidad productiva
O_g	subconjunto de salidas que son vendidas de forma global por la organización
O_l	subconjunto de salidas que son vendidas de forma local por cada unidad productiva
c_i	precio unitario de la entrada i (i,I_g)
c_{ir}	precio unitario a la que la unidad r puede comprar la entrada i (i,I_l)
f_r	coste fijo de mantener la unidad r abierta
b_k	precio unitario de la salida k (k,O_g)
b_{kr}	precio unitario a la que la unidad r puede vender la salida k (k,O_l)

El modelo propuesto es el siguiente:

$$\begin{aligned}
&\text{Max} \quad P = \sum_{k\in O_g} b_k \sum_r \hat{y}_{kr} + \sum_{k\in O_l}\sum_r b_{kr}\hat{y}_{kr} - \sum_{i\in I_g} c_i \sum_r \hat{x}_{ir} - \sum_{i\in I_l}\sum_r c_{ir}\hat{x}_{ir} - \sum_r f_r\delta_r \\
&\text{s.a.} \\
&\sum_j \lambda_{jr} x_{ij} = \hat{x}_{ir} \qquad \forall i,r \\
&\sum_j \lambda_{jr} y_{kj} = \hat{y}_{kr} \qquad \forall k,r \\
&\sum_j \lambda_{jr} = \delta_r \qquad \forall r \\
&\lambda_{jr}, \hat{x}_{ir}, \hat{y}_{kr} \geq 0 \quad \forall j,i,k,r \qquad \delta_r \in \{0,1\} \quad \forall r
\end{aligned} \tag{1}$$

Se trata de un modelo MILP que posee n*(n+m+p+1) variables, n de las cuales son binarias y n*(m+p+1) restricciones. Dicho modelo proyecta simultáneamente todas las unidades productivas sobre la frontera eficiente. Las variables binarias δ_r indican qué unidades permanecen abiertas cuando toma el valor unidad. Por otra parte, las unidades que son cerradas están siendo proyectadas sobre una unidad virtual vacía (con entradas y salidas nulas) y dicho caso supone el ahorro del coste fijo por mantener una unidad abierta f_r. De esta forma, las unidades que aún permanezcan tomarán un valor de entradas y salidas apropiados para que el beneficio de la organización sea máximo. Esto debe conseguirse sin que se aumente la cantidad total de cada uno de los recursos consumidos. Excepto en aquellos casos en donde las unidades productivas tengan grandes costes en sus entradas locales, bajos precios en sus productos locales, y/o altos costes fijos por mantener la instalación abierta y operativa, es de esperar que el modelo mantenga a la mayor parte de las unidades abiertas.

Puede observarse que este modelo puede ser descompuesto en n modelos (uno por cada unidad productiva) ya que la proyección de las diferentes unidades no interfieren. Cada subproblema se modelaría de la siguiente forma:

$$
\begin{aligned}
&\text{Maximize} \quad P_r = \sum_{k\in O_g} b_k \, \hat{y}_{kr} + \sum_{k\in O_l} b_{kr} \, \hat{y}_{kr} - \sum_{i\in I_g} c_i \, \hat{x}_{ir} - \sum_{i\in I_l} c_{ir} \, \hat{x}_{ir} - f_r \delta_r \\
&\text{s.t.} \\
&\sum_j \lambda_{jr} \, x_{ij} = \hat{x}_{ir} \qquad \forall i \\
&\sum_j \lambda_{jr} \, y_{kj} = \hat{y}_{kr} \qquad \forall k \\
&\sum_j \lambda_{jr} = \delta_r \\
&\lambda_{jr}, \hat{x}_{ir}, \hat{y}_{kr} \ge 0 \quad \forall j,i,k \qquad \delta_r \in \{0,1\}
\end{aligned}
\tag{2}
$$

Son n modelos MILP con n+m+p+1 variables cada uno (sólo una de ellas es binaria) y m+p+1 restricciones. Debido a que la solución trivial de δ_r =0 es admisible, una unidad permanecerá abierta siempre y cuando produzca un beneficio neto positivo. En el caso de que dicho beneficio neto fuera cero, sería indiferente mantener o no la unidad abierta a efectos de los parámetros introducidos en el modelo. También hay que hacer notar que, aunque el coste fijo asociado al mantenimiento de la unidad productiva, f_r, se utiliza en el modelo para decidir si es cerrada o no, no afecta sin embargo a los objetivos de operación de entradas y salidas que el modelo le asigna en el caso en que permaneciera abierta. Así pues, una vez que el modelo decide mantener una unidad productiva, no importa el coste que involucre mantenerla abierta a la hora de asignarle un objetivo de operación en la solución propuesta. A modo de ejemplo, si dos unidades tienen los mismos costes y precios locales para cada una de las entradas y salidas pero diferentes costes fijos, en el caso de que ambas permanecieran en la solución, el modelo las proyectaría hacia el mismo punto eficiente.

El modelo expuesto es muy versátil. Como ejemplo puede indicarse que es posible introducir fácilmente restricciones que impongan cotas inferiores y superiores a los consumos de entradas o a las producciones de salidas de cada unidad productiva, i.e. $L_i \le \hat{x}_{ir}$, $L_k \le \hat{y}_{kr}$.

Si se desea que el número de unidades productivas que permanezcan abiertas esté en un intervalo dado, se puede conseguir introduciendo la siguiente restricción

$$\Delta^{min} \le \sum_r \delta_r \le \Delta^{max} \tag{3}$$

si es para todas las unidades productivas o

$$\Delta_J^{min} \leq \sum_{r \in J} \delta_r \leq \Delta_J^{max} \tag{4}$$

si es para un subconjunto J de éstas. También se puede introducir restricciones que impidan incompatibilidades, dándose esta circunstancia en aquellos casos en donde no es posible (o deseable) que ciertas unidades pertenecientes a un subconjunto J permanezcan abiertas a la vez. Es el caso de la fusión de dos organizaciones en donde algunas de sus unidades podrían estar demasiado cercanas físicamente.

$$\sum_{r \in J} \delta_r \leq 1 \tag{5}$$

3. Discusión acerca del contexto aplicado a la fusión de varias organizaciones

Aunque este modelo es aplicable al caso de una organización con departamentos a su cargo, está especialmente indicada para un conjunto de unidades resultantes de la unión de dos o varias organizaciones. De ahí que se dedique este apartado a consideraciones realizadas en este contexto por otros autores.

La característica fundamental en este tipo de escenarios es que existan varios grupos de unidades productivas (normalmente pertenecientes a organizaciones diferentes) que tienen su propia frontera eficiente. En la literatura DEA existen métodos que son capaces de evaluar diferentes grupos de unidades en Charnes y Rhodes (1981), Ganley y Cubbin (1992), Brockett y Golany (1996). En el caso de dos organizaciones pueden identificarse tres posibles fronteras eficientes: una por cada grupo de unidades de forma separada, y una tercera que se construya por todas las unidades. Dos son las posibilidades que nos podemos encontrar en estas situaciones: que la referencia de un grupo sea mayor que la del otro o que, como normalmente sucede, dependiendo de la región de operación, cualquiera de los dos grupos puede ser mejor que el otro.

Estos métodos, además de no considerar los precios de las entradas y salidas del problema, no son adecuados en contextos donde un Decisor Central exista, ya que las unidades son proyectadas sobre las respectivas fronteras de forma independiente. En algunos casos de fusión de organizaciones, el coste de los recursos y el precio de los productos son conocidos a priori, lo que facilita la decisión sobre qué unidades dejar abiertas en función de los costes fijos de mantenerlas y de los resultados globales obtenidos por la organización resultante. Sin embargo, aunque el conocimiento de dichos precios y costes sean posteriores a la fusión, es posible emplear la metodología propuesta para un plan de acción global a posteriori.

4. Ilustración

Se ha considerado un sencillo caso de dos organizaciones con 5 unidades cada una con el fin de poder representarlos gráficamente. Cada una de las unidades productivas están consumiendo dos entradas (una de ellas adquirida de forma local y la otra de forma global) y producen una sola salida vendida localmente. La tabla 1 muestra las entradas y salidas involucradas en cada una de las unidades así como sus precios, el coste fijo asociado a mantener abierta la unidad y el beneficio neto que está obteniendo actualmente.

Tabla 1. Datos de entradas, salidas, costes y beneficios de cada unidad productiva

Organización	Unidad	x_1	x_2	y	c_{1r}	c_{2r}	b_r	f_r	P_r
I	A	15	80	50	5	3	10	150	35
	B	35	52	50	3	3	7	214	-125
	C	38	19	50	3	3	10	150	179
	D	45	70	50	5	3	9	150	-135
	E	20	84	50	5	3	10	180	-32
II	F	42	30	50	4	3	7	205	-113
	G	27	55	50	3	3	7	210	-106
	H	38	40	50	2	3	9	160	94
	I	23	40	50	2	3	10	165	169
	J	50	12	50	4	3	10	170	94
I+II	Total	---	---	---	---	---	---	---	60

En la Tabla 2 se muestra las proyecciones que el modelo VRS tradicional arroja, así como los resultados obtenidos mediante el modelo económico de desaparición propuesto en este artículo (1).

Tabla 2. Resultados de los modelos tradicional y centralizado

	Solución VRS				Solución centralizada			
Unidad	x_1	x_2	y	P_r	x_1	x_2	y	P_r
A	23	40	50	115	23	40	50	115
B	38	19	50	-35	0	0	0	0
C	38	19	50	179	38	19	50	179
D	23	40	50	65	23	40	50	65
E	23	40	50	85	23	40	50	85
F	38	19	50	-64	0	0	0	0
G	38	19	50	-31	0	0	0	0
H	38	19	50	157	38	19	50	157
I	38	19	50	202	38	19	50	202
J	38	19	50	121	38	19	50	121
Total	---	---	---	794	---	---	---	924

El resultado obtenido mediante el modelo centralizado se muestra en la Figura 1. Se ha representado con círculos a las unidades pertenecientes a la organización I y con cuadrados a las de la organización II. También puede observarse cómo las unidades B, F y G son cerradas.

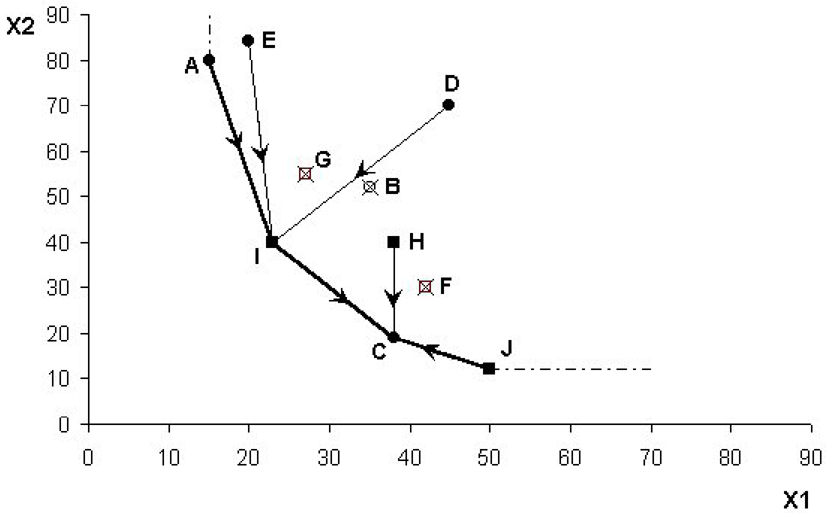

Figura 1. Proyecciones resultantes del modelo de beneficio máximo.

Para demostrar la versatilidad del modelo presentado, se ha propuesto un segundo escenario en donde algunas de las unidades productivas pertenecientes a diferentes organizaciones son incompatibles, debido por ejemplo a su gran proximidad.

Tabla 3. Incompatibilidades entre unidades existentes

Organización	**Unidad**				
I	A			1	
	B		1		
	C				1
	D			1	
	E	1		1	1
II	F	1	1	1	
	G		1		
	H				
	I	1		1	
	J	1			
I+II	Min/Max	0	1	0	1
		2	2	3	2

La tabla 3 muestra las incompatibilidades que se han propuesto para esta ilustración. Así, para cada columna de la tabla, aparece un 1 en aquella unidad que está involucrada en una incompatibilidad con alguna otra. La dos últimas filas indican el mínimo y el máximo de incompatibilidades que se asumirían en la solución propuesta.

La Tabla 4 y la Figura 2 muestran la solución propuesta por el modelo (1) para esta nueva situación con las restricciones de incompatibilidad pertinentes.

Tabla 4. Resultados del modelo centralizado en el caso de existencia de incompatibilidad

Unidad	x_1	x_2	**y**	P_r
A	23	40	50	115
B	0	0	0	0
C	38	19	50	179
D	23	40	50	65
E	0	0	0	0
F	0	0	0	0
G	38	19	50	-31
H	38	19	50	157
I	38	19	50	202
J	38	19	50	121
Total	---	---	---	808

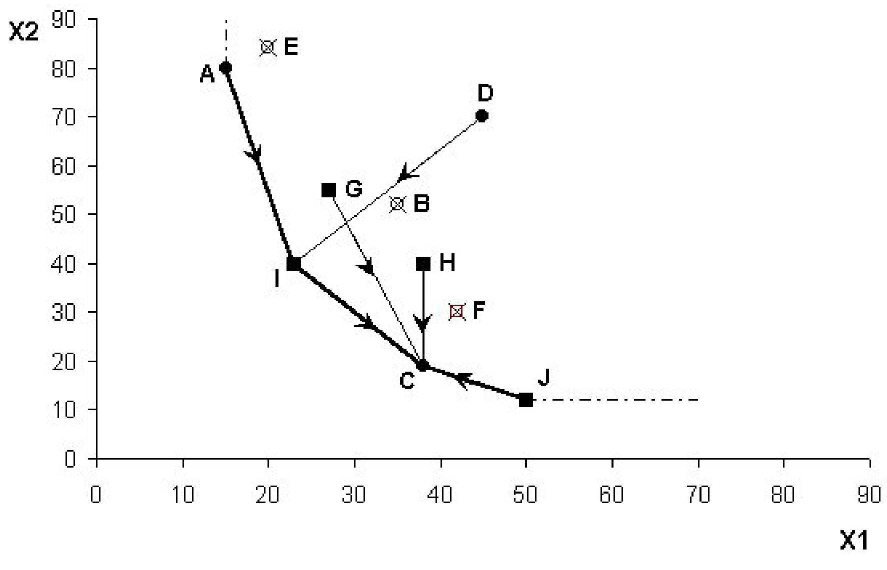

Figura 2. Proyecciones resultantes del modelo de beneficio máximo asumiendo incompatibilidades.

De ambas puede deducirse que, debido a que en la anterior solución propuesta se incumplía algún requisito de incompatibilidad, los resultados obtenidos en este nuevo escenario son diferentes. En esta ocasión desaparecen las unidades E y B de la primera organización y F de la segunda.

5. Conclusiones

Cuando los precios de las entradas y salidas de las unidades productivas son conocidos, el modelo DEA convencional que resuelve el problema, proyecta a las unidades productivas de forma independiente eliminando las ineficiencias tanto técnica como económica. Sin embargo existen situaciones en las que es más apropiado adoptar una perspectiva global, fijándose criterios de mejora de la organización como un todo. En este caso, la consideración de cerrar algunas unidades productivas permite un método de búsqueda de soluciones más flexible que puede dar lugar a situaciones más ventajosas que las actuales. En este artículo se ha desarrollado un nuevo modelo DEA en un escenario donde se quiera maximizar el beneficio global de la empresa. Además se ha realizado una ilustración sencilla con el objeto de demostrar la versatilidad del modelo propuesto. Otros casos pueden ser estudiados a partir del presentado como modelos en donde sólo se conozcan los datos de coste y que se pretenda minimizar el coste global en el que incurre la organización, o modelos en donde se incluyan datos de costes variables en cada unidad productiva. Las modificaciones del modelo se prevén simples y fáciles de incorporar.

Referencias

Brockett, P.L. y Golany, B. (1996), “Using Rank Statistics for Determining Programmatic Efficiency Differences in Data Envelopment Analysis”, *Management Science*, Vol. 42, No. 3, pp. 466-472.

Cooper, W.W., Seiford L.M. y Tone, K. (2000), *Data Envelopment Analysis. A Comprehensive Text with Models, Applications, References and DEA-Solver Software*. Kluwer Academic Publishers.

Färe, R., Grosskopf y Lovell, C.A.K. (1994), *Production Frontiers*, Cambridge University Press.

Ganley, J.A. y Cubbin, J.S. (1992), *Public Sector Efficiency Measurement: Applications of Data Envelopment Analysis*, North-Holland.

Lozano, S., Villa, G. y Adenso Díaz, B.(2004), “Centralised target setting for regional recycling operations using DEA”, *OMEGA,* Vol. 32, No. 2, pp. 101-110.