X Congreso de Ingeniería de Organización
Valencia, 7 y 8 de septiembre de 2006

Un modelo de programación lineal multi-objetivo para la resolución del MRP con restricciones de capacidad*

Josefa Mula Bru[1], Raúl Poler Escoto[2], José Pedro García Sabater[3]

[1,2] Centro de investigación de gestión e ingeniería de la producción, Universidad Politécnica de Valencia, EPSA, Plaza Ferrándiz y Carbonell, 2, 03801 Alcoy (Alicante) fmula@cigip.upv.es, rpoler@cigip.upv.es
[3]Dpto. de Organización de Empresas. Universidad Politécnica de Valencia. Camino de Vera s/n, 46022 Valencia. jpgarcia@doe.upv.es

Resumen

En este artículo se propone un enfoque de programación lineal multi-objetivo para su aplicación a un problema MRP con restricciones de capacidad e incertidumbre en los datos de costes. El modelo propuesto considera únicamente la posible ambigüedad en los coeficientes de la función objetivo, mientras que todas las restricciones se consideran deterministas. La solución a obtener por este modelo es imprecisa o fuzzy.

Palabras clave: MRP, incertidumbre, programación matemática *fuzzy*, programación lineal multi-objetivo.

1. Introducción

En un problema de Planificación de la Producción, donde el tiempo y la incertidumbre juegan un papel importante, el modelo de ayuda a la toma de decisiones debe diseñarse de forma que permita al usuario adoptar una política de toma de decisiones que pueda responder a eventos imprevistos. El objetivo de este artículo es modelar la incertidumbre de los costes ambiguos que puede estar presente en los procesos de Planificación de la Producción. Para ello, se van a aplicar enfoques de programación matemática *fuzzy* a problemas de Planificación de la Producción con coeficientes de coste ambiguos.

En este modelo se va a considerar únicamente la posible ambigüedad en los coeficientes de la función objetivo, mientras que todas las restricciones se consideran deterministas. Dentro de la función objetivo, los costes por retraso de la demanda para productos finales implican los costes explícitos por pérdidas de beneficio aunque también incluyen los costes por pérdida de imagen o clientes. Los costes de mantenimiento de inventarios contienen el coste del capital inmovilizado, seguros, variación de precios, etc. Los costes de la capacidad ociosa están afectados por el exceso de suministro de máquinas clave con respecto al volumen de producción actual de cada período. En este modelo, los costes por retraso de la demanda, los costes de inventarios y los costes de la capacidad ociosa se van a representar por distribuciones de posibilidad triangulares. Los parámetros de una distribución de posibilidad triangular vienen dados por los valores optimista, el más posible y el más pesimista.

* Este trabajo ha sido llevado a cabo en el marco de un proyecto financiado por la Universidad Politécnica de Valencia, titulado 'Desarrollo de modelos de programación matemática *fuzzy* para la planificación de la producción en contexto de incertidumbre. Aplicación a una empresa industrial del sector del automóvil'.

El artículo se ha estructurado de la siguiente forma. En la Sección 2 se formula el problema como un programa lineal *fuzzy*. En la Sección 3 se plantea un modelo multi-objetivo equivalente al problema formulado en la Sección 2. La Sección 4 finaliza el artículo con las conclusiones extraídas a lo largo de este trabajo.

2. Formulación del problema

Para el desarrollo del modelo se ha partido del modelo de programación lineal *MRPDet*, originalmente propuesto en Mula *et al*. (2006), *MRPDet* es un modelo para la optimización del problema de planificación a medio plazo en un entorno de fabricación MRP con restricciones de capacidad, multi-producto, multi-nivel y multi-período. Se considera la siguiente formulación *fuzzy* del modelo *MRPDet*. Las variables de decisión y parámetros del modelo *fuzzy* se definen en la Tabla 1.

$$\text{Minimizar } z = \sum_{i=1}^{I}\sum_{t=1}^{T}\left(cp_i P_{it} + \tilde{ci}_i\, INVT_{it} + \tilde{crd}_i\, Rd_{it}\right) + \sum_{r=1}^{R}\sum_{t=1}^{T}\left(\tilde{ctoc}_{rt}\, Toc_{rt} + ctex_{rt} Tex_{rt}\right) \qquad (1)$$

Sujeto a

$$INVT_{i,t-1} + P_{i,t-TS_i} + RP_{it} - INVT_{i,t} - Rd_{i,t-1} - \sum_{j=1}^{I} a_{ij}(P_{jt} + RP_{jt}) + Rd_{it} = d_{it} \quad i = 1\ldots I,\ t = 1\ldots T \qquad (2)$$

$$\sum_{i=1}^{I} AR_{ir}\, P_{it} + Toc_{rt} - Tex_{rt} = CAP_{rt} \quad r = 1\ldots R,\ t = 1\ldots T \qquad (3)$$

$$Rd_{iT} = 0 \quad i = 1\ldots I \qquad (4)$$

$$P_{it}, INVT_{it}, Rd_{it}, Toc_{rt}, Tex_{rt} \geq 0 \quad i = 1\ldots I,\ r = 1\ldots R,\ t = 1\ldots T \qquad (5)$$

donde $\tilde{ci}_i = (ci_{im}, ci_{io}, ci_{ip})$, $\tilde{crd}_i = (crd_{im}, crd_{io}, crd_{ip})$ y $\tilde{ctoc}_r = (ctoc_{rtm}, ctoc_{rto}, ctoc_{rtp})$ se representan con una distribución de posibilidad triangular.

Tabla 1. Variables de decisión y parámetros del modelo.

Índices	
T	Conjunto de períodos durante el horizonte de planificación (*t* = 1…*T*)
I	Conjunto de productos (*i* = 1…*I*)
J	Conjunto de productos padre en la lista de materiales (*j* = 1…*J*)
R	Conjunto de recursos (*r* = 1…*R*)

Variables de Decisión		*Data*	
P_{it}	Cantidad a producir del producto *i* en el período *t*	d_{it}	Demanda del producto *i* en el período *t*
$INVT_{it}$	Inventario del producto *i* al final del período *t*	α_{ij}	Cantidad requerida de *i* para producir una unidad del producto *j*
Rd_{it}	Demanda retrasada del producto *i* al final del período *t*		
Toc_{rt}	Tiempo ocioso del recurso *r* en el período *t*	TS_i	Tiempo de suministro del producto *i*
Tex_{rt}	Tiempo extra del recurso *r* en el período *t*	$INVT_{i0}$	Inventario del producto *i* en el período 0
		Rd_{i0}	Demanda retrasada del producto *i* en el período 0
Coeficientes de coste en la función objetivo		RP_{it}	Recepciones programadas del producto *i* en el período *t*
cp_i	Coste variable de producción de una unidad del producto *i*		
(ci_{im}, ci_{io}, ci_{ip})	Coste *fuzzy* de inventario de una unidad del producto *i*	*Coeficientes tecnológicos*	
(crd_{i1}, crd_{i2}, crd_{i3})	Coste *fuzzy* de una unidad de demanda retrasada del producto *i*	AR_{ir}	Tiempo requerido del recurso *r* por unidad de producción del producto *i*
($ctoc_{rtm}$, $ctoc_{rto}$, $ctoc_{rtp}$)	Coste *fuzzy* de una hora ociosa del recurso *r* en el período *t*	CAP_{rt}	Capacidad disponible del recurso *r* en el período *t*
$ctex_{rt}$	Coste de una hora extra del recurso *r* en el período *t*		

La función objetivo (1) trata de minimizar los costes de producción, mantenimiento de inventarios, retraso de la demanda, capacidad ociosa y capacidad extraordinaria requerida. Los costes de inventarios, retraso de la demanda y capacidad ociosa se consideran ambiguos.

Las restricciones relativas a las actividades de producción se consideran deterministas.

Las ecuaciones para el balance del inventario vienen dadas por el conjunto de restricciones (2). Estas ecuaciones tienen en cuenta los retrasos de la demanda, que en definitiva se comportan como un inventario negativo. Estas restricciones afirman que para un determinado producto y período, el nivel de inventario al final del período $INVT_{it}$ más el retraso de la demanda (si alguno) Rd_{it} es igual al inventario existente al final del período anterior $INVT_{i,t-1}$, más el volumen de producción finalizado en el período considerado, más las recepciones programadas para ese período RP_{it}, menos la demanda satisfecha en ese período, esto es, la demanda externa d_{it}, la demanda interna o inducida $\sum_{j=1}^{I} a_{ij}(P_{jt} + RP_{jt})$ y la demanda retrasada acumulada de períodos anteriores $Rd_{i,t-1}$. Es importante resaltar que la consideración del parámetro RP_{it} (recepciones programadas del producto *i* durante el período *t*) garantiza la continuidad del MRP a lo largo de las sucesivas explosiones realizadas durante un horizonte de planificación dado.

La producción en cada período está limitada por la disponibilidad de un conjunto de recursos compartidos. La ecuación (3) considera los límites de capacidad de estos recursos.

También se ha añadido una restricción (4) que termine con los retrasos en el último período del horizonte de planificación, por lo que en el período *T* toda la demanda del plan de producción debe quedar satisfecha.

Respecto a las variables de decisión Toc_{rt} y Tex_{rt}, que aparecen en la función objetivo (1) y en la restricción (3), no se limitan con ningún parámetro establecido aunque si se penalizan con los costes correspondientes. El motivo de ello, es proporcionar al modelo la mayor generalidad posible. La limitación de estas variables para aplicaciones específicas del modelo se podría hacer fácilmente teniendo en cuenta que si se exceden esos límites la solución del modelo podría ser infactible.

El modelo también contempla las restricciones de no negatividad (5) para las variables de decisión. Además, faltaría definir, dependiendo del entorno de fabricación donde se aplique el modelo, qué variables se definen como enteras y cuáles como continuas, es decir, que puedan tomar valores fraccionarios.

Sin mucha dificultad podrían añadirse otro tipo de restricciones más específicas de cada entorno de fabricación donde se aplique el modelo, tales como, procesos de producción alternativos para algunos productos, variables de las contrataciones y despidos de mano de obra para la planificación de recursos, límites para las horas extra, quizás una variable para la subcontratación o la posibilidad de permitir diferentes tamaños de lote de producción para un mismo producto, etc.

3. Planteamiento de un modelo multi-objetivo equivalente

No existe una solución convergente para resolver el problema formulado en el apartado anterior. Para resolver un problema de programación lineal con coeficientes ambiguos o *fuzzy* en la función objetivo y restricciones *no fuzzy*, Rommelfanger (1996) indica que la función objetivo *fuzzy* puede interpretarse como un requerimiento multi-objetivo. En general, no existe una solución ideal para este tipo de problemas y diversos autores proponen enfoques diferentes. Tanaka *et al*. (1984) adoptan un peso medio como sustituto del objetivo *fuzzy* con un especial objetivo de compromiso determinista. Sakawa y Yano (1989) restringen los coeficientes *fuzzy* a conjuntos de niveles-α. Luhandjula (1989) propone un concepto similar denominado solución eficiente β-posibilidad. Sin embargo, estos autores no explican las especificaciones de los niveles α y β y usan varias presunciones restrictivas, lo que limita la aplicación de estos modelos en la práctica (Hsu y Wang, 2001). Tanaka y Asai (1984) consideran la función objetivo como una restricción *fuzzy*, sin embargo, en algunas ocasiones, es difícil para los planificadores proporcionar una meta para la función objetivo.

Lai y Hwang (1992) convierten la función objetivo *fuzzy* con una distribución de posibilidad triangular en tres objetivos deterministas. La distribución de posibilidad triangular de la función objetivo $\tilde{z}$ se muestra en la Figura 1.

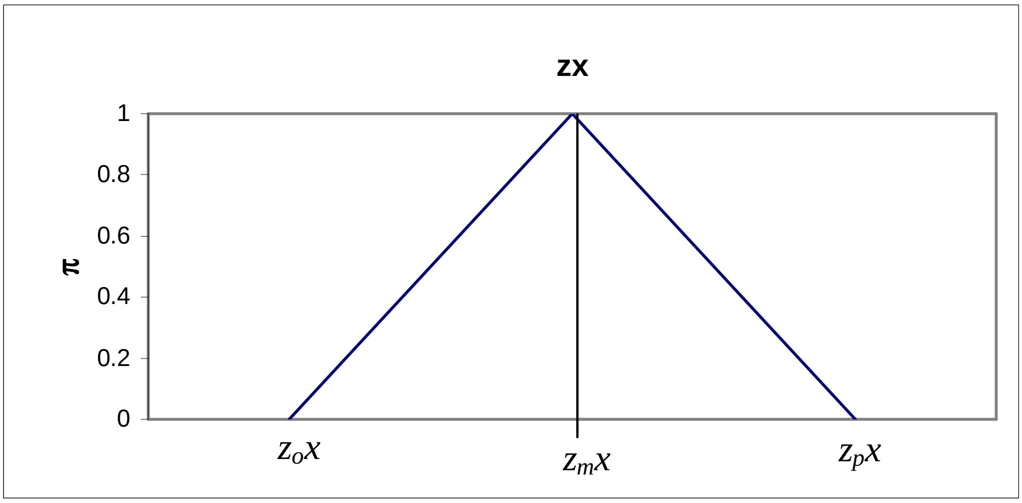

Figura 1. Distribución de posibilidad triangular de $\tilde{z}$.

En este trabajo se aplica el enfoque planteado por Lai y Hwang (1992) para transformar una función objetivo *fuzzy* con una distribución de posibilidad triangular en tres objetivos deterministas. De acuerdo con este enfoque, se define el modelo MRPFuzzy.OF/RD/T/MIN/SF_1.

MRPFuzzy.OF/RD/T/MIN/SF_1

Minimizar $z1=\sum_{i=1}^{I}\sum_{t=1}^{T}\left(cp_i P_{it} + ci_{im}\, INVT_{it} + crd_{im}\, Rd_{it}\right)+\sum_{r=1}^{R}\sum_{t=1}^{T}\left(ctoc_{rtm}\, Toc_{rt} + ctex_{rt} Tex_{rt}\right)$ (6)

Maximizar z2 =

$$\sum_{i=1}^{I}\sum_{t=1}^{T}\left(cp_i P_{it} + (ci_{im} - ci_{io})\, INVT_{it} + (crd_{im} - crd_{io}) Rd_{it}\right)+\sum_{r=1}^{R}\sum_{t=1}^{T}\left((ctoc_{rtm} - ctoc_{ro}) Toc_{rt} + ctex_{rt} Tex_{rt}\right) \quad (7)$$

Minimizar z3 =

$$\sum_{i=1}^{I}\sum_{t=1}^{T}\left(cp_i P_{it} + (ci_{ip} - ci_{im})\, INVT_{it} + (crd_{ip} - crd_{im}) Rd_{it} \right) + \sum_{r=1}^{R}\sum_{t=1}^{T}\left((ctoc_{rtp} - ctoc_{rm}) Toc_{rt} + ctex_{rt} Tex_{rt} \right) \quad (8)$$

Sujeto a

$$INVT_{i,t-1} + P_{i,t-TS_i} + RP_{it} - INVT_{i,t} - Rd_{i,t-1} - \sum_{j=1}^{I} a_{ij}(P_{jt} + RP_{jt}) + Rd_{it} = d_{it} \quad i = 1\ldots I,\ t = 1\ldots T \quad (9)$$

$$\sum_{i=1}^{I} AR_{ir}\ P_{it} + Toc_{rt} - Tex_{rt} = CAP_{rt} \qquad r = 1\ldots R,\ t = 1\ldots T \quad (10)$$

$$Rd_{iT} = 0 \qquad i = 1\ldots I \quad (11)$$

$$P_{it}, INVT_{it}, Rd_{it}, Toc_{rt}, Tex_{rt} \geq 0 \qquad i = 1\ldots I,\ r = 1\ldots R,\ t = 1\ldots T \quad (12)$$

El modelo *fuzzy* se ha transformado en un problema de programación lineal multi-objetivo. Este modelo minimiza el valor más posible de los costes ambiguos (6), mientras que se maximiza la posibilidad de obtener los costes más bajos (7) y se minimiza la posibilidad de obtener los costes más altos (8).

El resto de las restricciones del modelo (9, 10, 11, 12) permanecen inalterables respecto al modelo original adoptado como base de este trabajo, *MRPDet.*

La estructura de los datos para el modelo *MRPFuzzy.OF/RD/T/MIN/SF_1* requiere los siguientes datos adicionales respecto al modelo *MRPDet*:

- Coste de mantenimiento de inventarios: $\tilde{ci}_i = (ci_{im}, ci_{io}, ci_{ip})$.
- Coste del retraso de la demanda: $\tilde{crd}_i = (crd_{im}, crd_{io}, crd_{ip})$.
- Coste de la capacidad ociosa: $\tilde{ctoc}_r = (ctoc_{rm}, ctoc_{ro}, ctoc_{rp})$.

Existen muchos enfoques para resolver problemas de programación lineal multi-objetivo, tales como la programación por objetivos (Charnes y Cooper, 1961), la Teoría de la Utilidad (Keeney y Raiffa, 1976) y enfoques interactivos (Dyer, 1973). En el caso en que sea difícil para los planificadores de la producción determinar las metas requeridas por la programación por objetivos o establecer las funciones de utilidad requeridas por la Teoría de la Utilidad, podría ser conveniente la utilización del método de programación *fuzzy* con el proceso de normalización propuesto por Zimmermann (1978).

4. Conclusiones

Este artículo ha presentado un modelo matemático *fuzzy* para la Planificación de la Producción bajo condiciones de incertidumbre en la definición de los costes de la función objetivo. La formulación del modelo de programación lineal *MRPDdet*, adoptado como base de este trabajo, es un modelo tradicional de Planificación de la Producción con coeficientes de coste deterministas. Sin embargo, pueden encontrarse situaciones reales de los entornos de fabricación donde los criterios humanos son inherentes a la evaluación de ciertos valores o condiciones de coste. El modelo *fuzzy* propuesto ha tratado de incorporar la percepción difusa de los costes usando un enfoque de modelado multi-objetivo.

Referencias

Charnes, A.; Cooper, W.W. (1961) Management models and industrial applications of linear programming. New York.

Dyer, J.S. (1973) Interactive goal programming, *Management Science*, Vol. 19, 62-70.

Hsu, H.; Wang, W. (2001) Possibilistic programming in production planning of assemble-to-order environments. *Fuzzy Sets and Systems*, Vol. 119, 59-70.

Keeney, R.L.; Raiffa, H. (1976) Decisions with multiple objectives. New York, Santa Barbara, London.

Lai, Y.J.; Hwang, C.L. (1992) A new approach to some possibilistic linear programming problems, *Fuzzy Sets and Systems*, Vol. 49, 121-133.

Luhandjula, M.K. (1989) Fuzzy optimization: an appraisal, *Fuzzy Sets and Systems*, Vol. 30, 257-282.

Mula, J.; Poler, R.; Garcia, J.P. (2006) MRP with flexible constraints, *Fuzzy Sets and Systems*, Vol. 157, Nº 1, 74-97.

Rommelfanger, H. (1996) Fuzzy linear programming and applications, *European Journal of Operations Research*, Vol. 92, 512-527.

Sakawa, M.; Yano, H. (1989) Interactive fuzzy satisficing method for multiobjective nonlinear programming problems with fuzzy parameters, *Fuzzy Sets and Systems*, Vol. 30, 221-238.

Tanaka, H.; Asai, K. (1984) Fuzzy linear programming problems with fuzzy numbers. *Fuzzy Sets and Systems*, Vol. 13, 1-10.

Tanaka, H.; Okuda, T.; Asai, K. (1984) On fuzzy mathematical programming, *Journal of Cybernetics*, Vol. 3, 37-46.

Zimmermann, H.J. (1978) Fuzzy programming and linear programming with several objective functions, *Fuzzy Sets and Systems*, Vol. 1, 45-55.