

Aplicación de un modelo DEA de suma de salidas constantes (CSO) a los Juegos Olímpicos de Atenas 2004

Gabriel Villa Caro, Fernando Guerrero López, Ricardo Galán de Vega

Dpto. de Organización Industrial y Gestión de Empresas. Universidad de Sevilla. Camino de los Descubrimientos s/n, 41092 Sevilla. gvilla@esi.us.es, fergue@esi.us.es, rdevega@esi.us.es, jmgs@esi.us.es

Resumen

En principio, la metodología Análisis por Envoltura de Datos (DEA), trata de encontrar una medida individual de la eficiencia y los correspondientes targets de entradas y salidas para cada DMU. Sin embargo, en ciertos problemas, la suma total de salidas debe ser compartida entre las unidades productivas. En estas situaciones, los targets calculados por los modelos DEA convencionales no son realistas, ya que en ellos se asume que cada unidad puede mejorar sus salidas tanto como la tecnología permite, no teniendo en cuenta que la suma total de las salidas es fija a priori. Esto es lo que sucede en los Juegos Olímpicos: el número total de medallas es fijo para cada metal. En este trabajo se propone un modelo de programación lineal tipo DEA, denominado CSO-DEA, que proporcione unos niveles de salidas en los targets de cada DMU en la situación anterior. Se ha aplicado este modelo para el caso de Atenas 2004, y se han encontrado unas proyecciones más realistas que la que los modelos tradicionales proponen.

Palabras clave: DEA, suma de salidas constantes, Juegos Olímpicos

1. Introducción

El Análisis por Envoltura de Datos es una familia de herramientas de programación matemática que mide la eficiencia relativa de un conjunto de unidades productivas denominadas DMU, por sus siglas en inglés (Decision Making Unit). Para una descripción extensiva de esta técnica, ver Charnes et al. (1978), Banker et al. (1984), Cooper et al. (2000) and Thanassoulis (2003).

En Lozano et al. (2002) se introduce un modelo DEA VRS con restricciones en los pesos, (ver Thompson et al. (1986)) para medir el funcionamiento de las naciones de los Juegos Olímpicos. Posteriormente, Lins et al. (2003) ha propuesto otro modelo DEA denominado Zero Sum Gain (ZSG-DEA) que incorpora el hecho de que la suma total de medallas que pueden ser ganadas por los participantes, es constante, en principio. Sin embargo, la no linealidad del modelo hace difícil su resolución. Además, no puede dar soluciones útiles ya que el modelo ZSG es resuelto independientemente para cada participante, por lo que la suma del número de medallas en sus proyecciones no es igual al número total de medallas disponibles.

En este artículo se propone un nuevo modelo DEA denominado CSO-DEA (Constant Sum of Output) que tiene en cuenta tal escenario que la ventaja que el modelo resultante es de programación lineal.

El apartado 2 estará dedicado a introducir y explicar el modelo CSO propuesto. En el tercer apartado se realizará una aplicación con un ejemplo consistente en una sola entrada y dos salidas para ilustrar de forma gráfica los resultados arrojados por el modelo en cuestión. Posteriormente, en el apartado 4 se presentarán los resultados para el caso de los Juegos Olímpicos de Atenas 2004, para terminar en el apartado quinto con un resumen y conclusiones del trabajo expuesto.

2. El modelo CSO-DEA

En este apartado se presenta el modelo de suma de salidas constante. Este modelo afronta situaciones en las que el funcionamiento de todas las unidades son restringidas a un cierto nivel de salidas fijo.

n	número de DMUs
j,r	índices para las DMUs
i	índice para las entradas
k	índice para las salidas
O^{const}	conjunto de salidas cuya suma debe permanecer constante
x_{ij}	cantidad de entrada i consumida por DMU _j
y_{kj}	cantidad de salida k producida por DMU _j
$(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$	vector de variables para proyectar DMUs

El modelo tiene dos etapas. Primero se resuelve el modelo con orientación de salida convencional (BCC-O). Para cada DMU_r, las cantidades de salidas en la solución pueden medirse fácilmente por medio de la siguiente expresión:

$$\bar{y}_{kr} = \gamma_r^{BCCO} y_{kr} + h_{kr}^{BCCO} \quad \forall k, \forall r$$

donde γ_r^{BCCO} y h_{kr}^{BCCO} son los valores óptimos obtenidos por el modelo para la amplificación radial de las salidas y las holguras de salida.

La segunda etapa consta de tres fases. Considerando δ como la reducción radial de las salidas proporcionadas por (1), la primera fase es:

$$\begin{aligned} & \text{Max } \delta \\ & \text{s.a.} \\ & \sum_{j=1}^n \lambda_{jr} x_{ij} \leq \hat{x}_{ir} \quad \forall i, \forall r \\ & \sum_{j=1}^n \lambda_{jr} y_{kj} \geq \hat{y}_{kr} \quad \forall k, \forall r \\ & \sum_{j=1}^n \lambda_{jr} = 1 \quad \forall r \quad (*) \\ & \hat{x}_{ir} \leq x_{ir} \quad \forall i, \forall r \\ & \hat{y}_{kr} \geq \delta \bar{y}_{kr} \quad \forall k, \forall r \\ & \sum_{r=1}^n \hat{y}_{kr} = \sum_{r=1}^n y_{kr} \quad \forall k \in O^{const}, \lambda_{jr}, \hat{x}_{ir}, \hat{y}_{kr} \geq 0 \quad \delta \text{ libre} \end{aligned}$$

Las variables \hat{x}_{ir} e \hat{y}_{kr} indican el punto sobre el cual DMUr es proyectada en la solución. El primer y segundo grupo de restricciones establecen que dichas variables deben pertenecer a la tecnología especificada. El siguiente grupo de variables sólo se computa a la hora de resolver problemas con retornos de escala variables. Con las siguientes $m \cdot n$ restricciones, el modelo busca una solución en la que el consume de cada recurso no debe aumentar. Por otra parte, con las siguientes $n \cdot p$ restricciones, el modelo busca una solución en la que todas las salidas son radialmente acotadas por el valor de la variable δ respecto a la solución ofrecida por el modelo BCC-O. Finalmente, las siguientes restricciones, son necesarias para asegurar que la suma de cada salida permanece constante.

Como las salidas permanecen constantes, el incremento de salidas de una DMU sólo será posible en detrimento de otra DMU que deberá disminuir sus salidas. Por tanto, el valor óptimo de la variable δ será elegido para minimizar la reducción radial de salidas con respecto a la expansión radial de salidas dictada por el modelo DEA convencional utilizado en la primera fase del método.

Una vez resuelta esta fase, se obtiene el valor de la reducción radial mínima de salidas compatible con la tecnología y con la suma constante de salidas $k \in O^{\text{const}}$ impuesta. En este punto, es necesaria una segunda fase para determinar los targets finales teniendo en cuenta que el propósito del modelo será encontrar una solución admisible no muy diferente de la calculada por la fase radial. Llamando t_{kr} a la holgura en la cantidad de salida $k \in O^{\text{const}}$ de DMUr, la segunda fase se puede expresar como:

$$\begin{aligned} \text{Min} \quad & \sum_{k \in O^{\text{const}}} t_k^{\text{max}} \\ & \sum_{j=1}^n \lambda_{jr} x_{ij} \leq \hat{x}_{ir} \quad \forall i, \forall r \\ & \sum_{j=1}^n \lambda_{jr} y_{kj} \geq \hat{y}_{kr} \quad \forall k, \forall r \\ & \sum_{j=1}^n \lambda_{jr} = 1 \quad \forall r \quad (*) \\ & \hat{x}_{ir} \leq x_{ir} \quad \forall i, \forall r \\ & \hat{y}_{kr} = \delta^* \bar{y}_{kr} + t_{kr} \quad \forall k \in O^{\text{const}}, \forall r \\ & \hat{y}_{kr} \geq \delta^* \bar{y}_{kr} \quad \forall k \notin O^{\text{const}}, \forall r \\ & \sum_{r=1}^n \hat{y}_{kr} = \sum_{r=1}^n y_{kr} \quad \forall k \in O^{\text{const}} \\ & t_{kr} \leq t_k^{\text{max}} \quad \forall k \in O^{\text{const}}, \forall r \\ & \lambda_{jr}, \hat{x}_{ir}, \hat{y}_{kr}, t_{kr}, t_k^{\text{max}} \geq 0 \end{aligned}$$

La quinta restricción está dividida en esta ocasión en dos grupos: las salidas que deben ser mantenidas constantes en la solución, y el resto. Esto se hace porque el objetivo es calcular las salidas cuya suma deba permanecer constante en la solución, por lo que las holguras sólo deben aparecer constantes en las restricciones correspondientes a estas salidas. Cada una de las variables t_k^{max} representa una cota superior para las holguras t_{kr} cuya suma es minimizada en la función objetivo del modelo. Esto asegura que el valor óptimo de las holguras sea similar en todas las DMUs.

Finalmente es necesaria una última fase donde se determine la solución para el resto de salidas no incluidas en el conjunto O^{const} . Esta última fase involucra a cada DMU independientemente. Siendo \bar{y}_{kj} los targets calculados en la anterior fase, los definitivos targets se determinan de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} & \text{Max} \quad \sum_i s_{ij} + \sum_{k \notin O^{\text{const}}} q_{kj} \\ & \text{s.a.} \\ & \sum_{j=1}^n \lambda_j x_{ij} \leq \hat{x}_{ij} \quad \forall i \\ & \sum_{j=1}^n \lambda_j y_{kj} \geq \hat{y}_{kj} \quad \forall k \\ & \sum_{j=1}^n \lambda_j = 1 \quad (*) \\ & \hat{x}_{ij} = x_{ij} - s_{ij} \quad \forall i \\ & \hat{y}_{kj} = \bar{y}_{kj} \quad \forall k \in O^{\text{const}} \\ & \hat{y}_{kj} = \delta^* \bar{y}_{kj} + q_{kj} \quad \forall k \notin O^{\text{const}} \\ & \lambda_j, \hat{x}_{ij}, \hat{y}_{kj}, s_{ij}, q_{kj} \geq 0 \end{aligned}$$

donde s_{ij} y q_{kj} las holguras de las cantidades de entrada i y salidas $k \notin O^{\text{const}}$ respectivamente de cada DMUJ.

3. Una ilustración XYY

En este apartado se presenta un caso de una entrada y dos salidas con 7 unidades para analizar los resultados del modelo CSO propuesto. Para poder dibujar la solución gráficamente, se ha considerado un valor de la entrada constante e idéntico para todas las DMUs. En la tabla 1 se muestran los resultados numéricos proporcionados por el modelo BCC-O tradicional y el CSO cuando $y_1, y_2 \in O^{\text{const}}$ (escenario I); $y_1 \in O^{\text{const}}$ e $y_2 \notin O^{\text{const}}$ (escenario II); y por último cuando $y_1 \notin O^{\text{const}}$ e $y_2 \in O^{\text{const}}$ (escenario III). En la figura se muestra la representación gráfica.

Tabla 1. Datos y proyecciones de los modelos BCC-O y CSO para los distintos escenarios

DMU	DATA		BCC-O MODEL			CSO-DEA MODEL ($y_1, y_2 \in O^{\text{const}}$)				CSO-DEA MODEL ($y_1 \in O^{\text{const}}, y_2 \notin O^{\text{const}}$)				CSO-DEA MODEL ($y_1 \notin O^{\text{const}}, y_2 \in O^{\text{const}}$)			
	y1	y2	y1	y2	γ^{BCCO}	y1	y2	t1	t2	y1	y2	t1	q2	y1	y2	q1	t2
1	1	8	1	8	1	0.9	7.2	0	0.14	0.9	8.0	0	0.98	1.8	7.2	0.87	0
2	2	7	2	7	1	1.8	6.3	0	0.14	1.8	7.2	0	1.10	2.3	6.3	0.53	0
3	3	5	3	5	1	2.6	4.5	0	0.14	2.6	5.7	0	1.35	3.2	4.5	0.45	0
4	4	2	4	2	1	3.5	1.9	0	0.14	3.5	3.5	0	1.72	4.0	1.8	0.39	0
5	1.5	6	1.8	7.2	1.20	1.6	6.5	0	0.14	1.6	7.4	0	1.10	2.2	6.5	0.62	0
6	2	4	2.8	5.5	1.38	2.4	5.0	0	0.14	2.4	6.2	0	1.35	3.0	5.0	0.53	0
7	2.5	2	3.7	2.9	1.47	3.2	2.7	0	0.14	3.2	4.3	0	1.72	3.8	2.7	0.45	0
TOTAL	16	34	18.2	37.6	---	16	34	0	0.97	16	42.3	0	9.31	20.3	34	3.85	0
						$\delta^*=0.8775$				$\delta^*=0.8775$				$\delta^*=0.9031$			

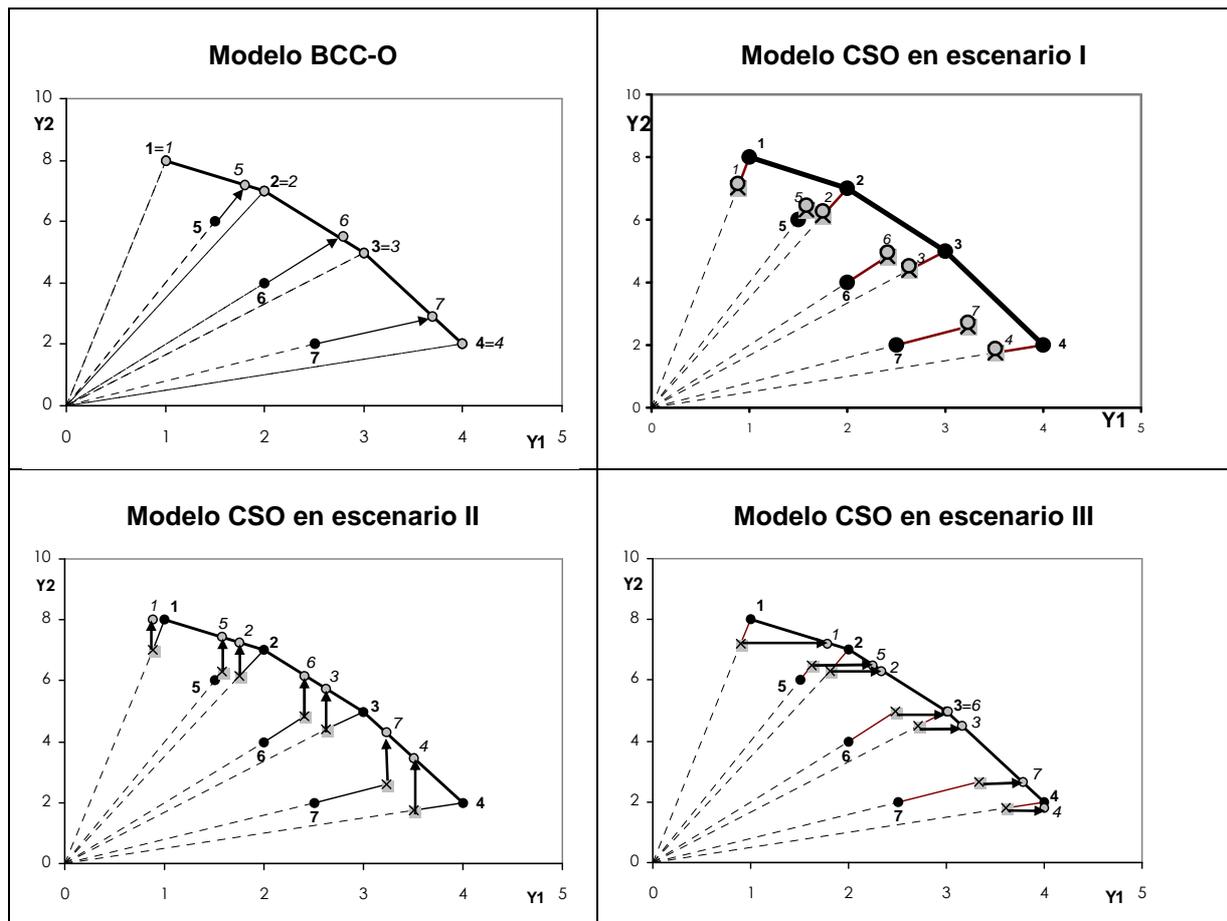


Figura 1. Resultados del caso YYY aplicado a los modelos BCCO y CSO.

Hay que hacer notar que en el escenario I no es necesaria la aplicación de la tercera fase ya que todas las salidas pertenecen al conjunto O^{const} . El resultado de la primera fase está representado mediante una cruz y reduce equiproportionalmente la solución obtenida por el modelo BCC-O. Respecto a los datos originales, se observa que para algunas DMUs se reduce y para otras se incrementa el valor de ambas salidas, posicionándose los targets de esta primera fase en una frontera de puntos ineficientes equidistantes a la frontera eficiente. La segunda fase, representada mediante un círculo gris, busca mediante holguras los targets más aproximados a los ofrecidos por la fase I. Finalmente los targets no están posicionados en la frontera eficiente. Esto conlleva a que unidades productivas eficientes deben funcionar peor de lo que lo estaban haciendo para permitir la mejora de otras unidades, ya que su eficiencia era la causante en cierta medida de la ineficiencia de las que eran ineficientes.

En los escenarios II y III la mayor parte de los targets proporcionados por el método se posicionan en la frontera eficiente, debido a las pocas dimensiones que el problema posee.

4. El modelo CSO-DEA aplicado a los juegos olímpicos

En este apartado se realiza una aplicación del modelo de suma de salidas constante para el caso de los Juegos Olímpicos de Atenas 2004 y lo comparamos con los resultados proporcionados por el modelo VRS-AR en Lozano et al. (2002).

Como las dos entradas propuestas en la aplicación son no discrecionales (ver Banker et al. 1986) y, en este caso, todas las salidas deben ser constantes (es decir, pertenecen al conjunto O^{const}), no hay necesidad de resolver la fase III del modelo CSO-DEA.

La tabla 2 muestra el número actual de medallas ganadas por los participantes (hay que hacer notar que el número no es exactamente igual para oro, plata y bronce debido a los empates en las distintas competiciones), los targets y la eficiencia obtenida por el modelo VRS-AR y por el modelo CSO-DEA.

Tabla 1. Datos y proyecciones de los modelos BCCO y CSO.

País	DATOS			MODELO VRS-AR				MODELOS CSO-DEA					
	NG	NS	NB	NG	NS	NB	$\gamma_r^{\text{VRS-AR}}$	NG	NS	NB	$t_{\text{NG},r}$	$t_{\text{NS},r}$	$t_{\text{NB},r}$
Argentina	2	0	4	13.4	11.9	16.9	6.70	5.2	5.1	6.5	0.06	0.58	0
Australia	17	16	16	17	16	16	1.00	6.6	6.7	6.1	0.06	0.58	0
Austria	2	4	1	7.4	6.4	7.0	2.71	2.9	3.0	2.7	0.06	0.58	0
Azerbaijan	1	0	4	2.8	2.6	1.2	1.90	1.1	1.6	0.5	0.07	0.60	0
Bahamas	1	0	1	1	0	1	1.00	0.4	0.0	0.4	0.06	0.00	0
Belarus	2	6	7	5.1	4.2	4.8	1.26	2.0	2.2	1.8	0.07	0.58	0
Belgium	1	0	2	9.3	7.5	8.1	9.30	3.6	3.5	3.1	0.07	0.57	0
Brazil	4	3	3	27.2	26.8	37.2	6.80	10.5	10.9	14.3	0.05	0.57	0
Bulgaria	2	1	9	5.3	4.3	5.3	1.69	2.1	2.2	2.0	0.06	0.58	0
Cameroon	1	0	0	3.7	3.2	2.6	3.70	1.5	1.8	1.0	0.07	0.58	0
Canada	3	6	3	18	17.1	18.2	4.55	7.0	7.1	7.0	0.06	0.58	0
Chile	2	0	1	10.1	8.2	12.2	5.05	3.9	3.7	4.7	0.06	0.57	0
China	32	17	14	32	17	14	1.00	12.3	7.1	5.4	0.06	0.58	0
Chinese Taipei	2	2	1	14.7	13.5	15.1	7.20	5.7	5.8	5.8	0.04	0.60	0
Colombia	0	0	1	11.5	9.8	14.8	67.29	4.5	4.3	5.7	0.05	0.58	0
Croatia	1	2	2	4.0	2.6	4.6	2.71	1.6	1.6	1.8	0.08	0.57	0
Cuba	9	7	11	9	7	11	1.00	3.5	3.3	4.2	0.06	0.58	0
Czech Republic	1	3	4	8.4	6.7	9.8	4.08	3.3	3.2	3.8	0.04	0.57	0
Denmark	2	0	6	5.2	4.2	4.9	2.19	2.1	2.2	1.9	0.07	0.60	0
Dominican Rep	1	0	0	5.7	4.7	5.8	5.73	2.2	2.4	2.2	0.06	0.60	0
DPR Korea	0	4	1	4.2	3.6	3.4	3.35	1.7	2.0	1.3	0.07	0.60	0
Egypt	1	1	3	12.2	10.6	15.9	9.30	4.7	4.6	6.1	0.04	0.58	0
Eritrea	0	0	1	0	0	1	1.00	0.0	0.0	0.4	0.00	0.00	0
Estonia	0	1	2	1.7	0.6	1.8	2.42	0.7	0.8	0.7	0.07	0.57	0
Ethiopia	2	3	2	2.6	2.5	1.0	1.04	1.1	1.5	0.4	0.05	0.60	0
Finland	0	2	0	5.0	4.0	4.8	7.96	2.0	2.1	1.8	0.06	0.58	0
France	11	9	13	20.2	19.5	23.0	1.84	7.8	8.1	8.8	0.06	0.57	0
Georgia	2	2	0	2	2	0	1.00	0.8	1.3	0.0	0.06	0.58	0
Germany	14	16	18	22.1	21.6	27.2	1.50	8.5	8.9	10.4	0.06	0.58	0
Great Britain	9	9	12	20.2	19.5	23.0	2.15	7.8	8.1	8.8	0.06	0.57	0
Greece	6	6	4	9.1	7.7	9.6	1.45	3.5	3.5	3.7	0.07	0.59	0
Hong Kong	0	1	0	6.3	5.3	6.0	20.37	2.5	2.6	2.3	0.07	0.59	0
Hungary	8	6	3	8.4	6.3	9.5	1.04	3.3	3.0	3.6	0.07	0.59	0
I. R. Iran	2	2	2	14.4	13	19.1	6.97	5.6	5.6	7.3	0.06	0.58	0
India	0	1	0	27.2	27.2	37.8	91.98	10.5	11.0	14.5	0.07	0.57	0
Indonesia	1	1	2	16.4	15.2	22.1	14.59	6.3	6.4	8.5	0.07	0.58	0
Ireland	1	0	0	4.1	0.9	2.3	4.11	1.6	0.9	0.9	0.07	0.58	0
Israel	1	0	1	6.1	2.8	5.0	6.07	2.4	1.7	1.9	0.07	0.58	0
Italy	10	11	11	20.1	19.4	22.8	1.93	7.8	8.0	8.7	0.06	0.58	0
Jamaica	2	1	2	2.1	1.2	1.9	1.05	0.9	1.0	0.7	0.06	0.57	0
Japan	16	9	12	25.7	25.6	35.1	1.61	9.9	10.4	13.5	0.06	0.59	0
Kazakhstan	1	4	3	8.0	6.3	9.4	3.73	3.1	3.0	3.6	0.08	0.60	0
Kenya	1	4	2	4.3	3.7	3.6	2.11	1.7	2.0	1.4	0.06	0.60	0
Korea	9	12	9	19.3	18.5	21.1	1.93	7.5	7.7	8.1	0.06	0.57	0
Latvia	0	4	0	2.4	1.3	2.8	1.79	1.0	1.1	1.1	0.04	0.60	0
Lithuania	1	2	0	3.3	2.1	3.9	2.26	1.3	1.4	1.5	0.05	0.60	0
Mexico	0	3	1	23.7	23.4	30.7	26.60	9.1	9.6	11.8	0.06	0.59	0
Mongolia	0	0	1	0	0	1	1.00	0.0	0.0	0.4	0.00	0.00	0
Morocco	2	1	0	9.5	7.6	11.8	4.74	3.7	3.5	4.5	0.04	0.58	0
Netherlands	4	9	9	14.0	13.0	13.2	2.23	5.4	5.6	5.1	0.07	0.60	0
New Zealand	3	2	0	3.9	2.6	3.9	1.31	1.6	1.6	1.5	0.05	0.58	0

País	DATOS			MODELO VRS-AR				MODELOS CSO-DEA					
	NG	NS	NB	NG	NS	NB	γ^{VRS-AR}	NG	NS	NB	$t_{NG,r}$	$t_{NS,r}$	$t_{NB,r}$
Nigeria	0	0	2	9.7	7.8	12.1	27.40	3.8	3.6	4.6	0.05	0.58	0
Norway	5	0	1	5	0	1	1.00	2.0	0.6	0.4	0.06	0.58	0
Paraguay	0	1	0	2.6	2.4	1.0	8.70	1.1	1.5	0.4	0.05	0.57	0
Poland	3	2	5	14.7	13.3	17.6	4.72	5.7	5.7	6.8	0.07	0.58	0
Portugal	0	2	1	8.6	7.2	9.3	12.67	3.4	3.3	3.6	0.06	0.60	0
Romania	8	5	6	10.1	8.2	12.6	1.26	3.9	3.7	4.8	0.07	0.58	0
Russia	27	27	38	27	27	38	1.00	10.4	10.9	14.6	0.06	0.58	0
Serbia/Montenegro	0	2	0	5.1	4.2	4.8	8.13	2.0	2.2	1.8	0.07	0.58	0
Slovakia	2	2	2	4.8	3.4	5.6	2.16	1.9	1.9	2.1	0.07	0.60	0
Slovenia	0	1	3	2.3	1.2	2.4	2.64	0.9	1.0	0.9	0.07	0.58	0
South Africa	1	3	2	13.9	12.5	18.2	8.37	5.4	5.4	7.0	0.05	0.60	0
Spain	3	11	5	18.7	17.9	19.7	3.44	7.2	7.4	7.6	0.06	0.59	0
Sweden	4	1	2	8.4	4.6	5.4	2.10	3.3	2.3	2.1	0.04	0.57	0
Switzerland	1	1	3	6.8	5.8	6.4	4.77	2.7	2.8	2.5	0.07	0.60	0
Syrian Arab Rep	0	0	1	6.3	5.1	6.7	34.70	2.5	2.5	2.6	0.07	0.60	0
Thailand	3	1	4	14.6	13.2	19.4	4.84	5.7	5.6	7.4	0.07	0.58	0
Trinidad/Tobago	0	0	1	1.8	0.7	2.0	8.58	0.7	0.9	0.8	0.06	0.57	0
Turkey	3	3	4	17.3	16.3	23.3	5.66	6.7	6.8	8.9	0.04	0.59	0
U Arab Emirates	1	0	0	3.9	1.8	3.6	3.90	1.6	1.3	1.4	0.07	0.57	0
Ukraine	9	5	9	9.9	8.0	12.4	1.09	3.9	3.7	4.8	0.06	0.58	0
United States	35	39	29	35	39	29	1.00	13.5	15.5	11.1	0.06	0.58	0
Uzbekistan	2	1	2	3.8	3.3	2.9	1.91	1.5	1.8	1.1	0.05	0.58	0
Venezuela	0	0	2	11.3	9.5	14.0	32.56	4.4	4.2	5.4	0.07	0.57	0
Zimbabwe	1	1	1	2.6	2.5	1.0	2.29	1.1	1.5	0.4	0.05	0.60	0
TOTAL	301	301	327	773.3	675.1	852.1	---	301	301	327	4.42	42.09	0
$\delta^*=0.38353$													

Se puede observar que las proyecciones dadas por el modelo VRS-AR son globalmente inalcanzables. Esto es porque se asume que todos los países ineficientes aumentarán sus salidas y aquellos países eficientes los mantendrán, con lo que requeriría un número de medallas superior a las disponibles (773,3 de oro; 675,1 de plata y 852,1 de bronce). De la misma tabla, como era de esperar, se observa que el número total de medallas que el modelo CSO proporciona es el mismo que el número total de medallas en los datos. Las grandes diferencias entre los targets obtenidos por el VRS-AR y los datos por nuestro modelo pueden ilustrarse echando un vistazo a los resultados de Brasil. Por una parte, el modelo propuesto por Lozano et al. Establece que este país debería ganar 23,2 medallas más de oro; 23,8 más de plata y 34,2 más de bronce para ser eficiente. Estos incrementos son tan altos debido a que el enfoque tradicional no tiene en cuenta que este resultado sólo sería posible si otros países perdieran ese número de medallas. Sin embargo, desde el punto de vista que ofrece el modelo CSO-DEA, los incrementos propuestos son mucho más moderados (6,5; 7,9 y 11,3 medallas para cada metal respectivamente).

La última fila de la tabla muestra que el valor óptimo de la variable δ en la fase I es igual a 0,3853. Esta reducción tan alta de salidas con respecto a los valores óptimos proporcionados por el modelo VRS-AR es ocasionado por la gran ineficiencia que algunas DMUs han desarrollado cuando el modelo VRS-AR es resuelto (ver por ejemplo los casos de India, Colombia Siria). En otras palabras, cuanto mayor es la suma de salidas en los targets proporcionados por el modelo tradicional, mayor también es la reducción de salidas en el modelo CSO-DEA. Obsérvese que el número de medallas de los tres tipos de metales es casi igual para cada participante.

El modelo CSO-DEA decrece la cantidad de cada metal respecto a las unidades eficientes en el modelo VRS-AR (véase los casos de Australia, Cuba o Estados Unidos) y los aumenta para las unidades más ineficientes del problema (por ejemplo Colombia, India o Venezuela).

Pero esto no sucede en todos los casos: hay algunas naciones ineficientes con una ineficiencia no muy grande cuyo número de medallas es disminuido por el modelo (Francia o Gran Bretaña). Además, los países ineficientes no siempre tienen el mismo comportamiento para todos los tipos de medallas, (por ejemplo Japón incrementa el número de medallas de plata y bronce, pero decrece el número de oros de 16 a 9,9). Por lo tanto se puede deducir que el comportamiento del modelo no es sencillo a la hora de encontrar el óptimo del problema.

Para finalizar, es interesante remarcar que en las tres últimas columnas de la tabla 2, las holguras $t_{NB,r}$ correspondientes a la salida son nulas. Los otros dos tipos de holguras tienen valores similares para cada país debido a la función objetivo de la fase II del modelo (las desviaciones estándar que presenta cada metal son muy pequeñas: 0,0134; 0,1158 y 0 respectivamente).

4. Resumen y conclusiones

Este trabajo ha presentado un modelo DEA para medir el comportamiento de las naciones en unos juegos olímpicos, incorporando un conjunto de restricciones que mantiene constante el total de medallas de oro, plata y bronce. Este enfoque es más realista que los contenidos hasta ahora en la literatura, debido a que dan unos targets más útiles. Finalmente es importante remarcar que los targets dados por CSO-DEA pueden ser interpretados como:

- a) un objetivo más realista para las naciones ineficientes, porque el modelo calcula el número de medallas de cada metal manteniendo la suma constante.
- b) las medallas que a largo plazo las unidades actualmente eficientes conseguirán cuando todas las naciones estén operando un nivel comparable.

Referencias

- Banker, RD.; Charnes, A.; Cooper, WW. (1984). Some Models for Estimating Technical and Scales Inefficiencies in Data Envelopment Analysis. *Management Science*, Vol. 30, pp.1078-1092.
- Bardhan, I.; Bowlin, WF.; Cooper, WW.; Sueyoshi, T. (1996). Models and measures for efficiency dominance in DEA. *Journal of the Operations Research Society of Japan*, Vol. 39 No. 3, pp. 322-332.
- Charnes, A.; Cooper, WW.; Rhodes, E.L. (1978). Measuring the efficiency of decision making units. *European Journal of Operational Research*, Vol. 2, No. 6, pp. 429-444.
- Cooper, WW.; Park, KS.; Pastor, JT. (1999). RAM: Range Adjusted Measure of Inefficiency for Use with Additive Models, and Relations to Other Models and Measures in DEA. *Journal of Productivity Analysis*, Vol. 11, pp. 5-42.
- Cooper, WW.; Seiford, LM., Tone, K. (2000). *Data Envelopment Analysis*. Kluwer Academic Publisher: Boston
- Lins, MPE.; Gomes, EG.; Soares de Mello, JCCB.; Soares de Mello, AJR. (2003). Olympic ranking based on a zero sum gains DEA model. *European Journal of Operational Research*, Vol. 148, pp. 312-322.
- Lozano, S.; Villa, G.; Guerrero, F.; Cortés, P. (2002). Measuring the performance of nations at the Summer Olympics using data envelopment analysis. *Journal of the Operational Research Society*, Vol. 53, pp. 501-511.

Thompson RG.; Singleton, FD.; Thrall, RM.; Smith, BA. (1986). Comparative site evaluations for locating a high-energy physics laboratory in Texas. *Interfaces*, Vol. 16, pp. 35-49.