

PLANIFICACIÓN CONJUNTA DE LA FABRICACIÓN Y DISTRIBUCIÓN DE PRODUCTOS CON VENTANAS TEMPORALES EN LAS ENTREGAS

J. M. García¹, S. Lozano², D. Pérez³, M. Calle⁴

¹ jmgs@esi.us.es

² slozano@cica.es

³ dperez@sadiel.es

⁴ marcoscallesuarez@wanadoo.es

Escuela Superior de Ingenieros, Universidad de Sevilla.
Camino de los Descubrimientos, s/n, 41092, Sevilla

Resumen

En este artículo estudiamos el problema asociado con la planificación conjunta de la fabricación y distribución de productos con ventanas temporales en las entregas de los pedidos. Para la fabricación de pedidos se cuenta con una planta desde la que se sirven los pedidos con ayuda de una flota de vehículos de idénticas características. El objetivo básico es encontrar la asignación de vehículos a pedidos que maximice el valor de los pedidos servidos. El problema se resuelve a través de un algoritmo de flujo en un grafo construido mediante técnicas de programación dinámica.

Palabras clave: Fabricación, distribución, ventana temporal, programación dinámica.

1. Introducción

Determinados productos no pueden ser fabricados con mucha antelación al momento exacto de ser servidos, debido fundamentalmente, a su carácter perecedero. La fabricación de estos productos suele ser por ello un proceso bastante básico que aparece acoplado a la distribución posterior del producto. En ocasiones, incluso el vehículo encargado de servir el pedido forma parte del proceso productivo. Un fiel reflejo de este problema se presenta en el sector de la construcción, concretamente en la fabricación y distribución del hormigón.

La fabricación del hormigón se compone de la mezcla de determinados materiales (cemento, agua, aditivos,...), y en la que se dispone de un tiempo limitado desde que se realiza la mezcla en la planta hasta que se descarga el hormigón en la obra. Debido a ello, la fabricación de la mezcla y su posterior distribución a la obra son procesos secuenciales que no admiten demora. El soporte en la realización de la mezcla son directamente los vehículos que distribuyen el hormigón a las diferentes obras, es decir, el proceso de fabricación del hormigón y la carga del mismo en el vehículo que lo distribuye se considera un mismo proceso. Los pedidos deben atenderse con celeridad lo que significa que, por lo general, en cada envío se atiende un solo pedido.

Atendiendo a la logística reflejada en la distribución del hormigón, en este artículo estudiamos la planificación conjunta para la fabricación y distribución sobre pedido en sistemas en los que el suministro de productos está acoplado al proceso productivo. Para el estudio del problema nos encuadramos en una situación totalmente determinista con un conocimiento completo de los pedidos que deben atenderse en un horizonte temporal determinado. El análisis se realiza con una sola planta de fabricación desde la que parten y donde inicialmente se encuentra la flota de vehículos, formada por V vehículos de idénticas características. La fabricación de los pedidos se limita a un único proceso que se realiza sin interrupciones. La planta de fabricación mide su capacidad de producción en número de pedidos que pueden ser atendidos al mismo tiempo. Cada pedido utiliza una unidad de capacidad durante el tiempo de fabricación, por lo que, suponiendo C unidades de capacidad en la planta, no pueden fabricarse más de C pedidos al mismo tiempo.

Los pedidos se atienden de forma independiente, lo que significa que cada uno de ellos es transportado por un solo vehículo, que regresa a la planta una vez servido el pedido y queda disponible para otras entregas. Se considera que el tamaño de los pedidos es inferior a la capacidad de los vehículos. Para cada pedido P_i definimos e_i como el instante de entrega solicitado y w_i como el valor o beneficio obtenido con la entrega del mismo en el instante e_i . Para cada pedido existe una ventana temporal $[a_i, b_i]$ con $a_i \leq e_i \leq b_i$ dentro de la que se considera admisible la entrega del pedido. El valor del pedido se ve modificado cuando el instante de entrega se desvía respecto al instante de entrega solicitado y se define para ello un coste unitario de penalización por exceso y otro por defecto que reducen el valor del pedido, quedando éste, finalmente, definido de la siguiente forma:

$$\text{Valor del pedido} \equiv w_i^o = \begin{cases} w_i(1 - (e_i - o_i)l_i^-) & e_i \geq o_i \\ w_i - (o_i - e_i)l_i^+ & e_i < o_i \end{cases} \quad o_i \in [a_i, b_i], \quad i = 1 \dots n$$

o_i = instante de entrega del pedido; l_i^- = coste de penalización por defecto sobre el instante de entrega solicitado; l_i^+ = coste de penalización por exceso.

Respecto a los tiempos asociados con la actividad del pedido, definimos tf_i como el tiempo de fabricación y tr_i como el tiempo de descarga del pedido. La ruta que realiza el vehículo hasta la localización del pedido lleva asociado un tiempo de envío ti_i y un tiempo de regreso a la planta tv_i . El tiempo total de la fase de distribución vendrá definido, por tanto, como $td_i = ti_i + tr_i + tv_i$. Derivados de los anteriores se definen $a'_i = a_i - ti_i - tf_i$ como el tiempo más temprano de comienzo del proceso de fabricación del pedido, $b'_i = b_i - ti_i - tf_i$ como el tiempo más tarde de comienzo del proceso de fabricación, $e'_i = e_i - ti_i - tf_i$ como el tiempo solicitado de comienzo de la fabricación del pedido y $f_i = b'_i + tf_i + td_i - 1$ como el periodo más tarde en el que puede estar realizándose la actividad del pedido.

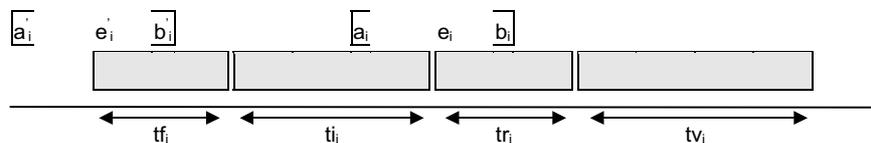


Figura 1: Esquema de la actividad asociada a un pedido

Los objetivos que se persiguen en problemas de planificación que manejan ventajas temporales son numerosos. El objetivo básico en el problema es la maximización del valor de los pedidos servidos, aunque daremos cabida también a objetivos parecidos como pueden ser la maximización del número de pedidos servidos o la maximización del número de pedidos servidos en su instante de entrega solicitado. Se pueden plantear incluso un objetivo secundario que busca minimizar el número de vehículos necesarios para satisfacer un conjunto de pedidos que optimice algunos de los objetivos anteriores.

2. Problemas relacionados

El problema descrito puede ser asociado a problemas de secuenciación en talleres de flujo flexible (*Flexible Flowshop, FFS*). Estos problemas, existentes en cierta clase de sistemas de fabricación, se caracterizan por múltiples centros de máquinas con varias máquinas idénticas en cada uno de ellos. Cada ítem del sistema tiene que ser procesado sobre una máquina en cada uno de los centros. El problema posee diversas versiones y objetivos, entre los que destacan la minimización del tiempo final de proceso (*makespan*) y todos lo que conciernen a la minimización de retrasos en los trabajos. La versión de este problema que más se ajusta al problema de la fabricación y distribución conjunta es aquella en la que no se permiten esperas en el procesamiento de cada ítem sobre los distintos centros (*no-wait*). Ramudhin y

Ratliff (1992) estudian este problema en particular. Consideran el problema de maximizar la suma de pesos de pedidos que pueden ser completados en un periodo determinado de tiempo para un taller con 2 centros de máquinas.

La similitud entre estos dos problemas se alcanza asociando la fase de fabricación con un primer centro de máquinas formado por C instancias, donde C es la capacidad de fabricación de la planta. La fase de distribución se consideraría como un segundo centro con un número de máquinas igual al número de vehículos V . Por tanto, la realización de un pedido conllevaría en primer lugar un tiempo de proceso tf_i en una de las máquinas del primer tipo y un tiempo td_i en una de las máquinas del segundo tipo. Además, como se comentó en la introducción, los procesos de fabricación y distribución son continuos, es decir, no admiten esperas. La diferencia fundamental radica en la existencia de una ventana temporal que no puede violarse en ningún caso. En los sistemas de taller de flujo flexible se establece una fecha de entrega, equivalente al instante de entrega solicitado para el pedido, pero no se impone restricción alguna sobre la fecha final de finalización de cada ítem, influyendo únicamente sobre dicha fecha el criterio que se establece en la función objetivo (minimización de retrasos, minimización del máximo retraso, maximización de los pesos de los pedidos no retrasados, etc...). Por ello, el problema FFS puede servir de guía para el problema objeto de este artículo cuando se trabaje con ventanas temporales con una amplitud tal, que no influya en las restricciones del problema.

Por otro lado, si el número de vehículos V es lo suficientemente grande de forma que siempre existan vehículos disponibles, el problema puede verse como un problema de secuenciación de trabajos con tiempos variables (*Variable Job Scheduling Problem, VSP*) que corresponde a la siguiente situación: Dados n trabajos con tiempos de proceso fijo y un intervalo de tiempo de comienzo, donde cada trabajo debe ser procesado sin interrupción sobre alguna de las máquinas disponibles, se trata encontrar la asignación de máquinas a trabajos que maximice el número de trabajos procesados. Surgen diversas versiones atendiendo al número de vehículos disponibles o a la clase de trabajos y máquinas. *Gertsbakh & Stern* (1983) proponen una formulación discreta del problema que usaremos de base para nuestra formulación.

3. Formulación

Discretizamos el tiempo mediante un conjunto de T intervalos o periodos indexados por el índice $j = 1 \dots T$, con el j -ésimo intervalo representando las unidades de tiempo entre $[j, j+1)$. Para cada pedido P_i con ventana temporal de comienzo $[a'_i, b'_i]$ se define el conjunto $T_i = \{a'_i, \dots, f_i\}$ como el conjunto total de instantes en los cuáles debe realizarse la actividad completa (fabricación y distribución) asociada al pedido P_i . Definimos $B_i = \{a'_i, \dots, b'_i - 1\}$ como el conjunto de instantes en los cuáles debe comenzar el pedido P_i . Se define también J_j como el conjunto de pedidos que puedan estar en curso en el j -ésimo instante de tiempo. El tiempo total de actividad de un pedido se define como $tt_i = tf_i + td_i$.

Se definen variables x_{ij} ($i = 1 \dots n; j \in T_i$) binarias, que toman valor 1 si P_i se procesa en el instante j y 0 en otro caso. Derivadas de éstas se definen variables binarias y_{ij} ($i = 1 \dots n; j \in B_i$) que toman valor 1 si P_i comienza en el instante j . Es necesario definir también un conjunto de variables z_{ij} ($i = 1 \dots n; j \in [a'_i, b'_i + tf_i - 1]$) para controlar que en los solapamientos en fábrica sólo puedan realizarse un máximo de C pedidos. Así, z_{ij} toma valor 1 si el P_i se fabrica durante el instante j . Se definen variables p_i ($i = 1 \dots n$) que determinan si el pedido se atiende o no. Usaremos variables n_i^+ y n_i^- que recojan el adelanto o el retraso sobre la fecha solicitada para el pedido.

El modelo que maximiza el valor de los pedidos atendería a la siguiente expresión:

$$\text{Max} \sum_{i=1}^n w_i^F p_i \quad (1)$$

s.a.

$$\sum_{j \in T_i} x_{ij} = tt_i p_i \quad i = 1 \dots n \quad (2)$$

$$\sum_{i \in J_j} x_{ij} \leq V \quad j = 1 \dots T \quad (3)$$

$$tt_i x_{ij} - tt_i x_{ij+1} + \sum_{k=j+2}^{f_i} x_{ik} \leq tt_i \quad i = 1 \dots n; \quad \forall j \in T_i \quad (4)$$

$$x_{ij} - x_{ij-1} = y_{ij} \quad i = 1 \dots n; \quad \forall j \in B_i \quad j \neq a'_i \quad (5)$$

$$t f_i y_{ij} \leq \sum_{k=j}^{j+t f_i - 1} z_{ik} \quad i = 1 \dots n; \quad \forall j \in B_i \quad (6)$$

$$\sum_{i=1}^T z_{ij} \leq C \quad j = 1 \dots T \quad (7)$$

$$\left(\sum_{j \in B_i} t y_{ij} - e'_i \right) - n_i^+ + n_i^- = 0 \quad i = 1 \dots n \quad (8)$$

$$w_i^F = w_i + n_i^+ l_i^+ + n_i^- l_i^- \quad i = 1 \dots n \quad (9)$$

$$x_{ij}, p_i, y_{ij}, z_{ij} \in \{0, 1\} \quad n_i^+, n_i^- \geq 0$$

Las restricciones (2) aseguran que cada pedido se realiza exactamente en el número de instantes de tiempo a que corresponde su actividad completa tt_i . Las restricciones (3) controlan que no más de V vehículos estén activos en cualquier período de tiempo. En (4) se asegura que cada pedido sea asignado a un conjunto adyacente de períodos. En (5) se obtiene el periodo de comienzo de cada pedido. En (6) se controla que se fabrique cada pedido durante los instantes de tiempo que dura su proceso de fabricación. Para controlar que no se fabriquen más de C pedidos en cada uno de los periodos se define el conjunto de restricciones mostrado en (7). Las restricciones (8) y (9) nos sirven para obtener el valor de cada pedido. La función objetivo definida en (1) es de carácter no lineal aunque no influye este hecho a la hora de resolver el problema.

Si pretendemos maximizar el número de pedidos que se atienden el problema puede prescindir de las restricciones (8) y (9), pasando la función objetivo a ser $\sum p_i$. Si queremos maximizar el número de pedidos entregados en la fecha solicitada la función objetivo pasa a ser $\sum_i y_{ie'_i}$, prescindiendo también de las restricciones (8) y (9).

4. Estrategia de resolución: grafo de estados.

El método de resolución que proponemos se basa en la idea planteada por *Arking & Silberger*(1987) para la resolución de un problema de secuenciación de trabajos con diferentes clases de máquinas, en la cuál se plantea un grafo donde los caminos del mismo definen las planificaciones admisibles para los trabajos. Planteamos, por tanto, la construcción de un grafo $G(N, A)$ mediante técnicas de programación dinámica donde van a estar recogidas todas las planificaciones admisibles de los pedidos. Posteriormente, y a través de un algoritmo de flujo sobre G , se obtendrá el óptimo del problema. El grafo permite la resolución del problema sobre cualquiera de los criterios de elección de soluciones planteado (maximizar el valor de los pedidos, maximizar el número de pedidos, maximizar el número de pedidos puntuales), simplemente variando los pesos de los arcos del grafo. Cada nodo del grafo representa un estado posible en que puede encontrarse la secuenciación de los pedidos. La formación de un estado se produce al comienzo del procesamiento de un pedido, pero nunca

por finalización de los mismos. Aquí se introduce una variación importante respecto al grafo propuesto por *Arking & Silverberg* (1987), en el que existe un nodo para el comienzo y otro para la finalización de cada trabajo en cada camino del grafo.

Para la construcción del grafo es necesario partir de los pedidos ordenados por el instante más temprano de comienzo a'_i . El grafo se estructura en niveles, con un nivel para cada pedido. En cada nivel se encuentran los nodos asociados a la realización del pedido. El conjunto N de nodos son cada uno de los estados en los que puede encontrarse cualquier planificación admisible del conjunto de pedidos, además de añadir un nodo s inicial (sin actividad) y un nodo e de finalización de la planificación. Cada camino de s a e define una planificación admisible y cada nodo del camino define que pedidos son los que están en curso y en que instante de la ventana temporal comenzaron. Esta información se almacena en el nodo mediante la notación $P_i(h_i)$, con $h_i = o_i - e'_i$, significándose el pedido en curso y entre paréntesis la diferencia entre el instante de comienzo del pedido y el instante solicitado, tomando como positivos los retrasos y como negativos los adelantos. En el grafo se contemplará también estados que correspondan con no realizar el pedido (figura 2). Según ello, la estructura general del grafo correspondería con la de un árbol que se va ramificando a medida que van apareciendo pedidos, como se muestra en la figura 2.

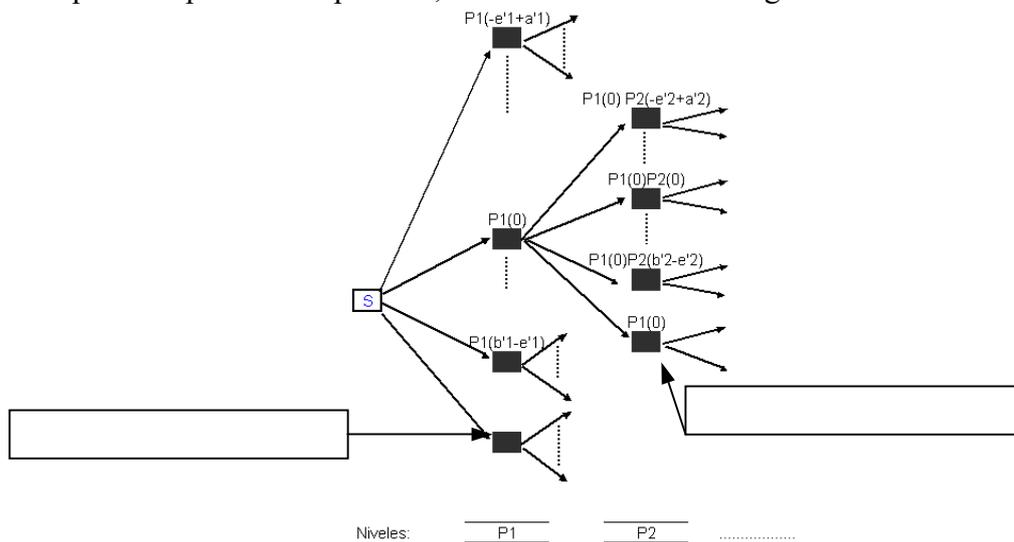


Figura 2: Estructura general del grafo

Sin embargo, la expansión del grafo se ve truncada por la finalización de los pedidos a lo largo del tiempo. Cada pedido que finaliza disminuye el grado de ramificación del grafo. Cuando la actividad de los pedidos aparece muy solapada en el tiempo se produce un alto grado de ramificación en el grafo. Además, es necesario descartar en la planificación aquellos estados que generan planificaciones no admisibles, es decir, estados en los que se viole la capacidad de fabricación en planta o el número de vehículos disponibles.

Cada nivel del grafo vendrá determinado por los nodos que se originan tras la realización de cada pedido y que denotamos por el conjunto de nodos N_i ($i = 1..n$). Para un pedido P_i con ventana temporal de comienzo $[a'_i, b'_i]$ podrán establecerse un máximo de $(b'_i - a'_i + 1)|N_{i-1}|$ estados. De un nodo cualquiera del nivel $i-1$, pueden generarse un máximo de $(b'_i - a'_i + 1)$ estados en el nivel i .

Según lo visto, el número de nodos del grafo correspondería a $|N| = \sum_{j=1}^n |N_j| + 2$ cuyo orden es de $O((\max_i |b'_i - a'_i|)^{n+1})$. El orden en el número de arcos coincide con el de los nodos.

A pesar del orden establecido, es poco probable la obtención de ese número de nodos en el grafo debido a las propias restricciones del modelo respecto a la capacidad de fabricación y al número de vehículos. Además, como podrá verse en la ilustración que se expone a continuación, la finalización de pedidos limita la expansión del grafo.

En la figura 3 se muestra un diagrama temporal sobre la demanda de 4 pedidos que se distinguen por la fase de fabricación, representada en oscuro, la posterior fase de distribución y una ventana temporal de comienzo representada entre barras paralelas (| |). El esquema general de un pedido sería el siguiente:

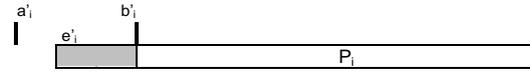


Figura 3: Esquema general de un pedido

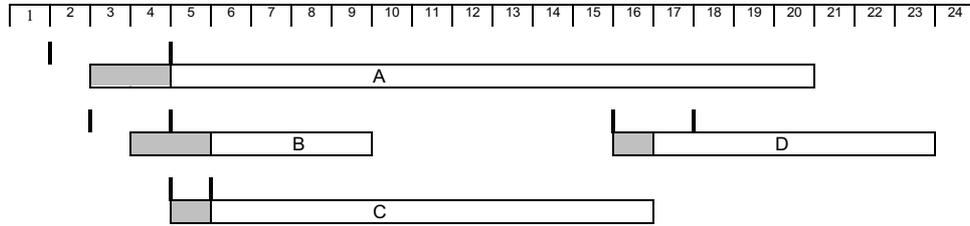


Figura 4: Ejemplo

Los datos de cada pedido son los siguientes:

Pedidos	a'_i	e'_i	b'_i	tf_i	td_i	w_i
A	2	3	4	2	16	5
B	3	4	4	2	4	4
C	5	5	5	1	11	8
D	16	16	17	1	7	5

Tabla 1

Supondremos una capacidad de fabricación de 1 unidad y 2 vehículos disponibles.

A continuación se muestra la formación del grafo en dos fases. En la primera se forma el grafo para los dos primeros niveles (pedidos A y B). En la segunda se muestra el grafo completo:

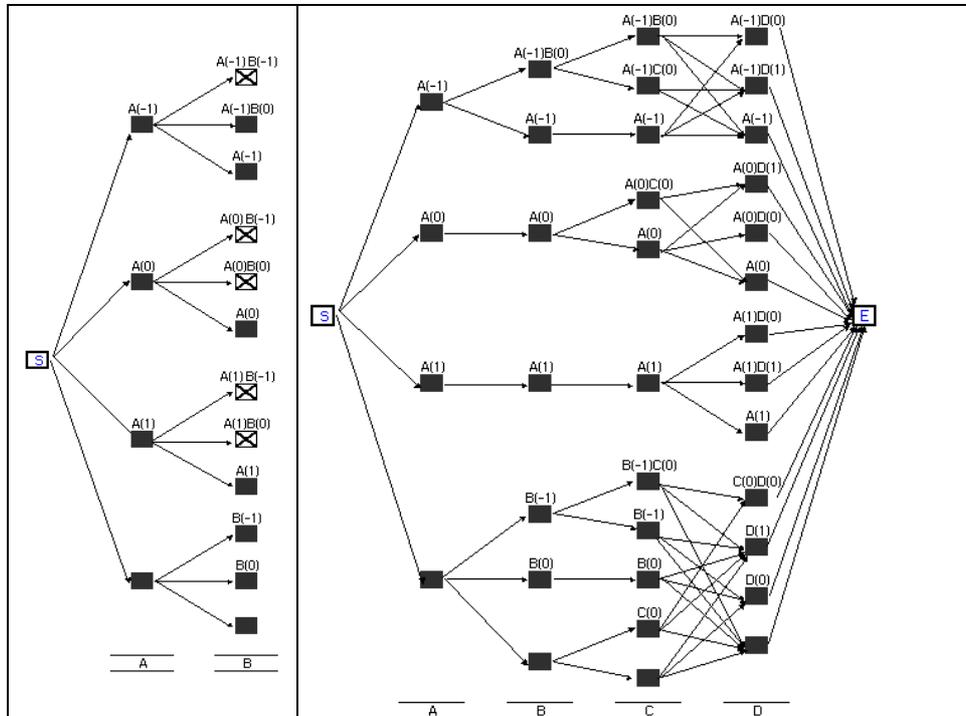


Figura 5: Formación de un grafo de estados

Los nodos marcados con \otimes se corresponden con estados no admisibles y que por tanto no aparecerán en el grafo final. La condición de admisibilidad de un estado implica que el número de pedidos en curso sea menor o igual al número de vehículos disponibles o que el

número de pedidos que se procesan en fábrica no supere la capacidad de fabricación. Los nodos que no tienen información sobre el pedido de su nivel se corresponden con no realizar el pedido. En el grafo final (figura derecha) se observa como la finalización del pedido B antes de comenzar D e incluso la finalización de C antes de b'_D provoca una reducción del número de estados en el nivel D. Ello provoca que muchos caminos(planificaciones admisibles) estén formados por estados comunes.

4.1 Reducción del Grafo

Es posible la reducción del número de nodos del grafo. Ello se consigue eliminando los nodos que no impliquen una variación en el sistema, es decir, que no impliquen el comienzo de un pedido. Los arcos con destino en un nodo i a eliminar, $(j, i) j \in N$, y los arcos con origen en i , $(i, k) k \in N$, se sustituyen por arcos $(j, k) \forall j, k$. Ello provoca que en el grafo reducido puedan existir arcos entre niveles no consecutivos.

Además, es posible eliminar determinados arcos que a priori se sabe que no van a formar parte de ninguna planificación óptima. Ese es el caso de aquellos arcos que conectan nodos no terminales al nodo e , entendiéndose como nodos no terminales aquellos desde los que parten arcos hacia nodos que no son el nodo e .

El grafo del ejemplo, una vez reducido, quedaría de la siguiente forma:

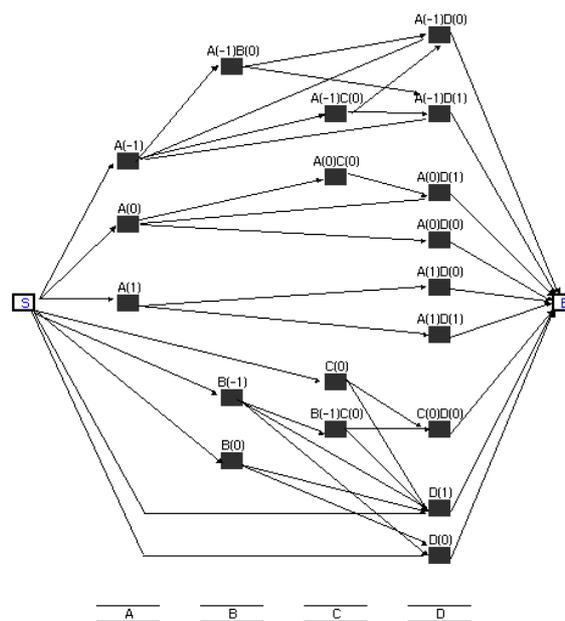


Figura 6: Grafo de estados reducido

El objetivo que se persiga va a definir los pesos que asignemos a los arcos del grafo. Veamos cuales serían esos pesos $p(i,j)$ en función del tipo de objetivo:

- Maximizar el valor de los pedidos servidos: $\forall (i,j) \in A, i \in N_m, j \in N_n, p(i,j) = w_i^o$; o = instante de comienzo de P_n en el nodo j . Un algoritmo de ruta mínima obtendría el óptimo del problema. Aquellos arcos pertenecientes al camino definirían los pedidos realizados y en que instantes .

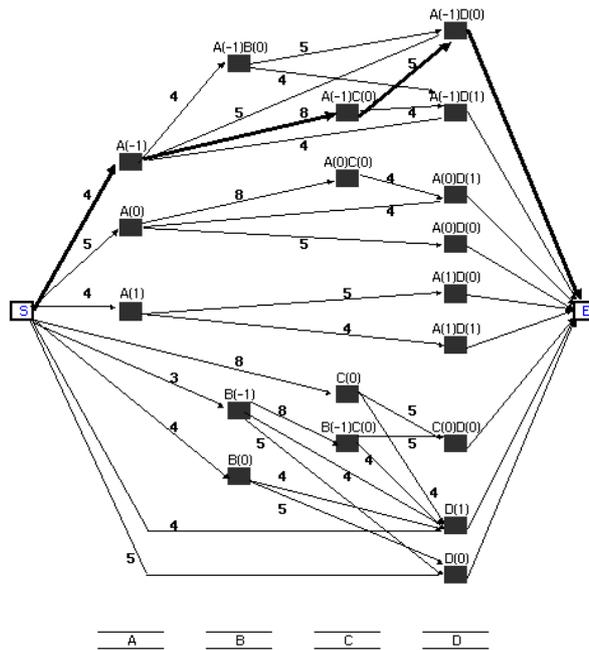


Figura 5: Ruta mínima para el cálculo del máximo valor de pedidos servidos

En la figura 5 se ilustra el cálculo del máximo valor para el ejemplo. La ruta mínima, marcada en grueso, muestra que el óptimo corresponde con realizar el pedido C y el D en el instante solicitado y el A con una unidad de tiempo de retraso. El valor total es de 17.

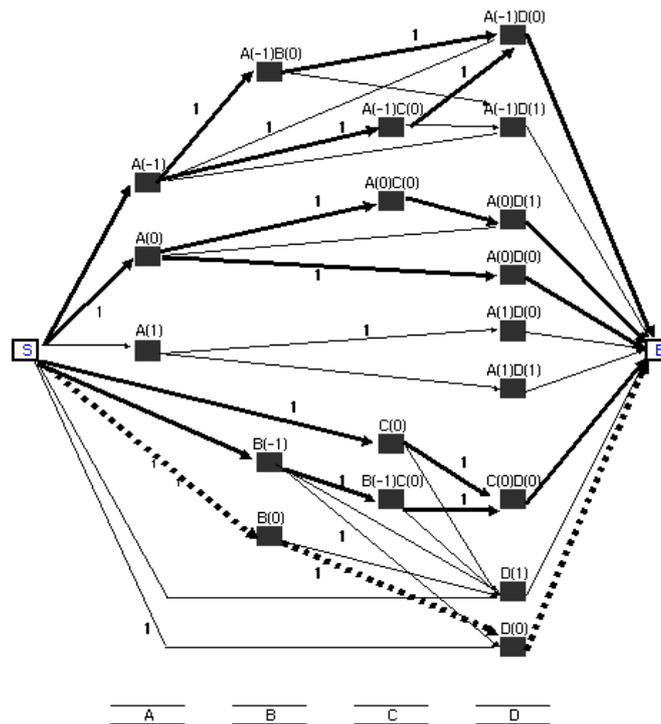
- *Maximizar el número de pedidos servidos:* Sería equivalente al caso anterior pero asignando pesos $\forall (i,j) \in A \quad p(i,j) = 1$. Un algoritmo de ruta mínima obtendría el número máximo de pedidos.

- *Maximizar el número de pedidos servidos en su instante de entrega solicitado:* Correspondería a asignar peso 1 a aquellos arcos cuyo nodo destino implica la iniciación de un pedido en su instante solicitado e i .

4.2 Obtención del número mínimo de vehículos.

Para obtener el mínimo número de vehículos necesarios como segundo objetivo sobre cualquiera de los anteriores, es necesario calcular la ruta mínima entre s y e que hace mínimo el nodo con máxima utilización de vehículos, es decir, el nodo con mayor número de pedidos en proceso. Este problema podría ser tratado como un problema multiobjetivo en el cuál los objetivos son la minimización de la longitud de la ruta y la minimización de la máxima utilización de vehículos. Sin embargo, una alternativa mucho más simple y práctica es calcular todas las rutas mínimas de s a e a través de un algoritmo descrito en Christofides(1975) y escoger aquella que minimiza el nodo con máxima ocupación de vehículos.

En la siguiente figura se muestra la ilustración para el caso de obtener el máximo número de pedidos servidos con puntualidad haciendo uso del menor número posible de vehículos. Con flecha gruesa (\Rightarrow) aparecen sobre el grafo todas las rutas que hacen mínimo el objetivo primario (maximizar el número de pedidos), mientras que con flecha rayada (\dashrightarrow) se señala, de entre ellas, la ruta que hace mínimo el número d vehículos. Se observa como el óptimo del primer objetivo son 2 pedidos servidos de manera puntual, y el número mínimo de vehículos necesarios es 1.



5. Conclusiones

En este artículo hemos presentado el problema asociado a la fabricación y distribución conjunta mediante pedido, no tratado como tal en la bibliografía aunque si muy asociado con problemas comunes de secuenciación de trabajos.

Se ha descrito como estrategia de resolución una forma clásica de resolver problemas complejos en el campo de la secuenciación, la construcción de un grafo que almacene todas las posibles planificaciones del sistema. El cálculo de soluciones óptimas con el uso de estos grafos se muestra eficiente en función de la disposición de los pedidos en el tiempo. Cuando el grado de simultaneidad de los pedidos es elevado, la expansión del grafo adquiere un carácter poco eficiente para la resolución del problema. Sin embargo, el uso de este tipo de grafos transmite una visión clara de todas las soluciones admisibles del problema.

6. Referencias

- [1] Arking E.M., Silverberg E.B., (1987) "Scheduling jobs with fixed start and end times", *Discrete Applied Mathematics* 18, pp. 1-8.
- [2] Gertsbakh I., Stern H.I., (1978), "Minimal resources for fixed and variable job schedules" *Operations Research* Vol. 26/1, pp. 68-85.
- [3] Gabrel V., (1995), "Scheduling jobs within time windows on identical parallel machines: New model and algorithms" *European Journal of Operations Research* 83, pp. 320-329.
- [4] Nicholas G. Hall, Chelliah Sriskandarajah, (1996) "A survey of machine scheduling problems with blocking and no-wait in process" *Operations Research* Vol 44, No. 3, May-June 1996.
- [5] Christofides N., (1975) "Graph Theory. An Algorithmic Approach" Ed. Werner Rheinboldt. University of Maryland. ACADEMIC PRESS INC(LONDON) LTD. London, U.K., pp. 167-170