

# REASIGNACIÓN CENTRALIZADA DE RECURSOS MEDIANTE DEA

G. Villa<sup>1</sup>, S. Lozano<sup>2</sup>, F. Guerrero<sup>3</sup> y J. M. García<sup>4</sup>

<sup>1</sup>Escuela Superior de Ingenieros, Universidad de Sevilla  
Camino de los Descubrimientos, s/n, 41092, Sevilla, gvilla@esi.us.es

<sup>2</sup>Escuela Superior de Ingenieros, Universidad de Sevilla  
Camino de los Descubrimientos, s/n, 41092, Sevilla, slozano@cica.es

<sup>3</sup>Escuela Superior de Ingenieros, Universidad de Sevilla  
Camino de los Descubrimientos, s/n, 41092, Sevilla, fergue@esi.us.es

<sup>4</sup>Escuela Superior de Ingenieros, Universidad de Sevilla  
Camino de los Descubrimientos, s/n, 41092, Sevilla, jmgs@esi.us.es

## RESUMEN

*El Análisis por Envoltura de Datos (DEA) es una metodología para comparar la eficiencia relativa de diferentes unidades productivas. Los modelos DEA convencionales tratan por separado cada unidad. En este artículo se presentan dos modelos DEA con el objeto de reasignar recursos. El primero de ellos busca reducciones radiales de la suma de las entradas mientras que el segundo reduce de forma separada cada entrada de acuerdo con una preferencia fijada. En ambos casos se garantiza que la suma de las salidas no decrecerá. Las claves de los modelos que se proponen son la simplicidad de los mismos y el hecho de que en ambos todas las unidades son proyectadas sobre la frontera eficiente. Se exponen, por último, una interpretación gráfica y unos resultados numéricos aplicados a los modelos presentados.*

## 1 Introducción.

El Análisis por Envoltura de Datos (DEA en la nomenclatura anglosajona), es una técnica de programación lineal usada para la medición de la mejora relativa de un número de unidades que producen de forma similar. Para ello, sólo se requiere el conocimiento de la cantidad de entrada utilizada y de salida producida en cada unidad. A las unidades productivas se les denominan DMU (Decision Making Unit) haciendo referencia al hecho de que tienen libertad para modificar la cantidad de sus entradas y/o salidas.

La metodología DEA requiere de un importante primer paso que sería la identificación del conjunto de posibilidades de producción del problema, esto es, definir los posibles puntos de operación. Las dos alternativas más frecuentes son las tecnologías denominadas Retornos de Escala Constante (Constant Return to Scale, CRS) y Retornos de Escala Variable (Variable Return to Scale, VRS). La tecnología CRS considera como unidad admisible dentro del problema cualquier combinación lineal de las DMUs observadas, mientras que en la tecnología VRS sólo se consideran admisibles las combinaciones lineales convexas.

Un segundo paso consiste en la selección del modelo DEA adecuado al problema a resolver. Existen multitud de modelos DEA, todos ellos con el mismo objetivo: encontrar un punto admisible de mayor productividad con el que puedan compararse las diferentes DMUs del problema. De esta forma, dada una cierta DMU<sub>0</sub>, se formula un modelo de programación lineal que busca una combinación lineal (convexa en el caso VRS) de las DMUs existentes, definiendo de esta forma un conjunto de puntos

tecnológicamente admisibles que usan menos entradas que  $DMU_0$  y/o produce mas salidas que la  $DMU_0$ . Si ningún punto domina a  $DMU_0$ , entonces se le denomina unidad eficiente (técnicamente eficiente en el caso de VRS). Si por el contrario la  $DMU_0$  no es eficiente, el modelo la proyecta sobre la frontera eficiente y mide la eficiencia de la  $DMU_0$  en términos de reducción del consumo de las entradas e incremento en la producción de salida. Hay diferentes maneras de realizar la proyección y medición de la distancia entre la  $DMU_0$  y el punto sobre el que se proyecta. Así, la orientación de entrada consiste en la reducción tanto como sea posible de todas las entradas de forma equi-proporcional sin reducir las salidas. Por otra parte, la orientación de salida consiste en incrementar tanto como sea posible las salidas de forma equi-proporcional sin un incremento de las entradas. Existen modelo no radiales con orientación de entrada o salida así como modelos con orientación de entrada-salida que intentan conseguir tanto reducción de entradas como incrementos de salidas. Una exposición más amplia estudio sobre la metodología está disponible en Cooper et al (2000) [1].

El modelo propuesto en este artículo difiere de los modelos DEA convencionales en que las DMUs del problema no son proyectadas sobre la frontera eficiente de forma independiente, sino de forma agregada. Por tanto el objetivo ya no será la reducción individual de las entradas de cada DMU sino del total de las entradas consumidas por todas las unidades.

En el apartado 3 de este artículo se presenta dicho modelo. En el cuarto apartado se ilustra el modelo aplicado a dos problemas y se compara con el modelo DEA convencional, y con otros basados en la reasignación de recursos. En el apartado 5 se presentará un resumen y las conclusiones.

## **2 Literatura relevante sobre la reasignación de recursos.**

Existen referencias en la literatura que estudian las DMUs de forma conjunta. Así, Golany et al (1993) [2] presentó un modelo de reasignación de recursos basado en la metodología DEA con orientación de entrada. En un artículo posterior, Golany y Tamir (1995) [3] propusieron un modelo DEA de reasignación de recursos con orientación de salida, que incluye restricciones que imponen cotas superiores al consumo total de las unidades. Athanassopoulos (1995) [4] presenta un modelo DEA, modelo de programación de objetivo (GoDEA) para un plan centralizado. Athanassopoulos (1999) [5] propone un nuevo modelo, esta vez no en forma envolvente sino en forma multiplicadora. Así mismo, Färe et al (1997) [6] y Beasley (2001) [7] presentan modelos donde las DMUs son tratadas de forma conjunta.

## **3 Modelo propuesto para la reasignación de recursos mediante DEA.**

En este apartado se presentan dos modelos para la reasignación de recursos, uno radial y otro no radial. En ambos se pueden utilizar varias formulaciones en función de si se considera orientación de entrada, orientación de salida o de forma simultánea ambas orientaciones. Para una mayor simplicidad, se considerará en esta sección el caso de orientación de entrada. Los modelos correspondientes a la orientación de salida se incluyen en el apéndice. También se asumirá retornos de escala variables (VRS), aunque con mínimas modificaciones en la formulación podrían considerarse los casos de retornos de escala constantes (CRS), crecientes (IRS) o decrecientes (DRS).

### 3.1 Modelo radial, orientación de entrada.

Como es usual en los modelos radiales, existen dos fases. En la primera fase se busca una reducción equi-proporcional en todas las entradas, mientras que en la segunda fase lo que se busca es una reducción adicional de las entradas y/o una expansión de las salidas. Las dos diferencias esenciales respecto de los modelos DEA convencionales son:

- En vez de solucionar un modelo de programación lineal para cada DMU presente en el problema, todas las DMUs son proyectadas de forma simultánea.
- En vez de reducir las entradas de cada DMU, es el total del consumo de entradas de las DMUs lo que se pretende reducir.

Así, considerando:

$j, r=1, 2, \dots, n$	subíndice para las DMUs
$i=1, 2, \dots, m$	subíndice para las entradas
$k=1, 2, \dots, p$	subíndice para las salidas
$x_{ij}$	cantidad de entrada $i$ consumida por DMU $j$
$y_{kj}$	cantidad de salida $k$ producida por DMU $j$
$\theta$	reducción radial del vector del total de entradas
$s_i$	holgura en la dimensión de entrada $i$
$t_k$	incremento en la dirección de salida $k$
$(\lambda_{1r}, \lambda_{2r}, \dots, \lambda_{nr})$	vector para la proyección de DMU $r$

La fase I del modelo es:

(Fase I/Radial/Orientación de entrada)

Minimizar  $\theta$

s.a.

$$\begin{aligned}
 \sum_{r=1}^n \sum_{j=1}^n \lambda_{jr} x_{ij} &\leq \theta \sum_{j=1}^n x_{ij} & \forall i \\
 \sum_{r=1}^n \sum_{j=1}^n \lambda_{jr} y_{kj} &\geq \sum_{r=1}^n y_{kr} & \forall k \\
 \sum_{j=1}^n \lambda_{jr} &= 1 & \forall r \\
 \lambda_{jr} &\geq 0 & \theta \text{ libre}
 \end{aligned} \tag{1}$$

Es un problema lineal con  $n^2+1$  variables y  $m+p+n$  restricciones. Siendo  $\theta^*$  el óptimo del modelo anterior, la segunda fase del modelo se puede formular de la siguiente forma:

(Fase II/Radial/Orientación de entrada)

$$\text{Maximizar } \sum_{i=1}^m s_i + \sum_{k=1}^p t_k$$

s.a.

$$\begin{aligned} \sum_{r=1}^n \sum_{j=1}^n \lambda_{jr} x_{ij} &= \theta^* \sum_{j=1}^n x_{ij} - s_i & \forall i \\ \sum_{r=1}^n \sum_{j=1}^n \lambda_{jr} y_{kj} &= \sum_{r=1}^n y_{kr} + t_k & \forall k \\ \sum_{j=1}^n \lambda_{jr} &= 1 & \forall r \\ \lambda_{jr}, s_i, t_k &\geq 0 \end{aligned} \quad (2)$$

Una vez resuelta la fase II, el vector  $(\lambda^*_{1r}, \lambda^*_{2r}, \dots, \lambda^*_{nr})$  define para cada DMU  $r$  el punto al cuál deberían tender dichas unidades. Las entradas y salidas de cada punto pueden ser calculadas como:

$$\hat{x}_{ir} = \sum_{j=1}^n \lambda^*_{jr} x_{ij} \quad \forall i \quad (3)$$

$$\hat{y}_{kr} = \sum_{j=1}^n \lambda^*_{jr} y_{kj} \quad \forall k \quad (4)$$

**Proposición:** G. Villa et al (2001) [8]. Para cualquier DMU $_r$ , el punto sobre el que se proyecta  $(\hat{x}_{1r}, \hat{x}_{2r}, \dots, \hat{x}_{mr}, \hat{y}_{1r}, \hat{y}_{2r}, \dots, \hat{y}_{pr})$  es eficiente técnico.

Por lo tanto, el modelo radial propuesto proyecta de forma conjunta cada DMU existente sobre la frontera de eficiencia técnica. Aunque es muy posible que suceda, no se puede demostrar que para cada entrada el consumo total en la solución de la fase II sea necesariamente menor que la suma del consumo de la entrada de las unidades independientemente proyectadas con orientación de entrada. Esto es debido a la naturaleza de la función objetivo de la fase II, que añade todas las holguras de entrada y salida.

Como cada DMU es proyectada sobre la frontera de eficiencia técnica, sería lógico pensar que una DMU existente que es ya eficiente técnica, debería proyectarse sobre ella misma. Esto es válido cuando cada DMU se proyecta de forma independiente pero no cuando se usa una filosofía centralizada ya que puede ser conveniente para el resultado total que una DMU existente y eficiente técnica se proyecte sobre un punto diferente en la frontera eficiente.

Del anterior párrafo se puede concluir que una reasignación centralizada de recursos implica un sometimiento de las unidades individuales en su comportamiento de cara al objetivo del sistema como un todo. Por ello, y aunque en este artículo lo mantendremos por conveniencia, denominar a las unidades productivas como DMUs no es muy

apropiado ya que han perdido su autonomía de escoger sus propias entradas y salidas. El único y real decisor en el problema es la planificación central.

Para formular el modelo dual de la fase I, sea

$u_i$  multiplicador (por ejemplo, precio) asignado a la entrada  $i$  por todas las DMUs  
 $v_k$  multiplicador (por ejemplo, precio) asignado a la salida  $k$  por la DMU  $r$   
 $\xi_r$  variable auxiliar VRS para la DMU  $r$

(Dual/Fase I/Radial/Orientación de entrada)

$$\begin{aligned} &\text{Maximizar} \quad \sum_{r=1}^n \sum_{k=1}^p v_k y_{kr} + \sum_{r=1}^n \xi_r = \sum_{k=1}^p v_k \sum_{r=1}^n y_{kr} + \sum_{r=1}^n \xi_r \\ &\text{s.a.} \\ &\quad \sum_{i=1}^m u_i \sum_{j=1}^n x_{ij} = 1 \\ &\quad \sum_{k=1}^p v_k y_{kj} - \sum_{i=1}^m u_i x_{ij} + \xi_r \leq 0 \quad \forall j \quad \forall r \\ &\quad u_i \geq 0 \quad v_k \geq 0 \end{aligned} \quad (5)$$

se puede observar que todas las DMUs comparten el mismo peso para las entradas y las salidas.

### 3.2 Modelo radial, orientación de entrada.

En este apartado se presenta un nuevo modelo no radial con orientación de entrada, que también consta de dos fases. La fase I considera un factor de reducción diferente para cada entrada, ponderándolos de acuerdo a las preferencias del analista, véase Thanassoulis y Dyson (1992) [9]. Sea

$\theta_i$  Factor de reducción para el consumo total de entrada  $i$   
 $w_i$  Coeficiente de preferencia para la reducción del consumo total de entrada  $i$

El modelo fase I es

(Fase I/No Radial/Orientación de entrada)

$$\begin{aligned} &\text{Minimizar} \quad \sum_{i=1}^m w_i \theta_i \\ &\text{s.a.} \\ &\quad \sum_{r=1}^n \sum_{j=1}^n \lambda_{jr} x_{ij} \leq \theta_i \sum_{j=1}^n x_{ij} \quad \forall i \\ &\quad \sum_{r=1}^n \sum_{j=1}^n \lambda_{jr} y_{kj} \geq \sum_{r=1}^n y_{kr} \quad \forall k \\ &\quad \sum_{j=1}^n \lambda_{jr} = 1 \quad \forall r \\ &\quad \lambda_{jr} \geq 0 \quad \theta_i \text{ free} \end{aligned} \quad (6)$$

Este modelo de programación lineal tiene  $n^2+m$  variables y  $m+p+n$  restricciones. Si  $\theta_i^*$  es el óptimo del modelo anterior, entonces la fase II puede formularse como

(Fase II/No Radial/Orientación de entrada)

$$\begin{aligned}
 & \text{Maximizar} \quad \sum_{k=1}^p t_k \\
 & \text{s.a.} \\
 & \sum_{r=1}^n \sum_{j=1}^n \lambda_{jr} x_{ij} = \theta_i^* \sum_{j=1}^n x_{ij} \quad \forall i \\
 & \sum_{r=1}^n \sum_{j=1}^n \lambda_{jr} y_{kj} = \sum_{r=1}^n y_{kr} + t_k \quad \forall k \\
 & \sum_{j=1}^n \lambda_{jr} = 1 \quad \forall r \\
 & \lambda_{jr}, s_i, t_k \geq 0
 \end{aligned} \tag{7}$$

Como puede observarse, para este modelo no se requieren holguras de entrada ya que la fase I ha agotado todas las posibles reducciones a lo largo de cada dimensión de entrada. Una vez resuelta la fase II, el vector  $(\lambda_{1r}^*, \lambda_{2r}^*, \dots, \lambda_{nr}^*)$  define para cada  $DMU_r$  la unidad productiva sobre la que se proyecta. Las entradas y salidas de cada punto pueden ser calculadas de la siguiente forma

$$\bar{x}_{ir} = \sum_{j=1}^n \lambda_{jr}^* x_{ij} \quad \forall i \tag{8}$$

$$\bar{y}_{kr} = \sum_{j=1}^n \lambda_{jr}^* y_{kj} \quad \forall k \tag{9}$$

**Proposición:** G. Villa et al (2001) [8]. Asumiendo  $w_i > 0 \forall i$ , entonces, para cualquier  $DMU_r$ , el punto sobre el que se proyecta  $(\bar{x}_{1r}, \bar{x}_{2r}, \dots, \bar{x}_{nr}, \bar{y}_{1r}, \bar{y}_{2r}, \dots, \bar{y}_{pr})$  es eficiente técnico.

Por lo tanto, los dos modelos propuestos, radial y no radial, proyectan todas las DMUs de forma conjunta sobre la frontera de eficiencia técnica. Es interesante comparar ambos modelos. Para ello consideremos la siguiente formulación en la fase I del modelo radial.

(Fase I/Radial/Orientación de entrada)

Minimizar  $\theta$

s.a.

$$\begin{aligned} \sum_{r=1}^n \sum_{j=1}^n \lambda_{jr} x_{ij} &\leq \theta_i \sum_{j=1}^n x_{ij} & \forall i \\ \theta &\geq \theta_i \\ \sum_{r=1}^n \sum_{j=1}^n \lambda_{jr} y_{kj} &\geq \sum_{r=1}^n y_{kr} & \forall k \\ \sum_{j=1}^n \lambda_{jr} &= 1 & \forall r \\ \lambda_{jr} &\geq 0 & \theta_i \text{ free} \end{aligned} \tag{10}$$

De esta forma, en la formulación radial está implícitamente asumido que las reducciones del consumo total de todas las entradas son iguales y, por lo tanto, la variable  $\theta$  calcula el mayor valor de los factores de reducción realizables para las diferentes entradas. Para algunas entradas, frecuentemente son posibles reducciones adicionales, y se tendrán en cuenta mediante las variables de holgura de entrada correspondientes a la fase II del modelo.

#### 4 Interpretación gráfica

En este apartado, se estudia la interpretación gráfica de los modelos propuestos. Para tal fin, se expondrán dos ejemplos, cada uno de ellos con siete DMUs. El primer problema (denotado XY) es un problema de una sola entrada y una sola salida, mientras que el segundo (denotado XX1) es un problema de dos entradas y una salida (constante en este caso).

Para el problema XY los modelos radial y no radial coinciden. La tabla 1 muestra las DMUs originales así como aquéllas sobre las que se proyectan usando el modelo BCC-I y el modelo propuesto. Hay que hacer notar que el modelo propuesto proyecta las DMUs sobre los puntos eficientes técnicos que funcionan en su tamaño de escala más productivo.

DMU	Datos		BCC-I		Puntos propuestos	
	x	Y	x*	y*	$\hat{x} = \tilde{x}$	$\hat{y} = \tilde{y}$
A	3	3	3	3	4	8
B	4	8	4	8	4	8
C	5	5	3.4	5	3.6	6
D	5	10	5	10	4	8
E	6	8	4	8	4	8
F	7	11	7	11	4	8
G	8	9	4.5	9	4	8
Total	38	54	31.4	54	27.6	54

Tabla 1. Problema XY datos y resultados

Como cabría esperar, el modelo propuesto obtiene una mayor reducción que la obtenida por el modelo BCC-I. Como puede observarse en la figura 1, esto puede ser así porque no proyecta necesariamente en una dirección horizontal, como en el BCC-I. La razón es que no existe ninguna restricción que obligue a ninguna DMU a disminuir su salida mientras no disminuya la cantidad total de salida.

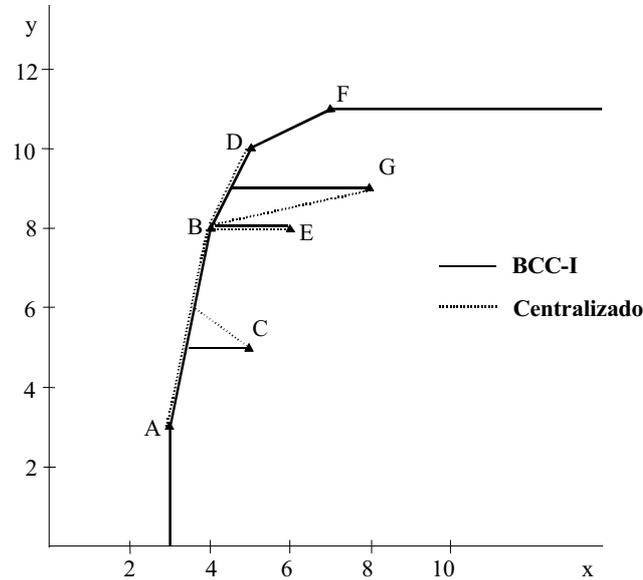


Figura 1. Problema XY, visualización

Para el problema XX1 se ha resuelto usando BCC-I y los dos posibles modelos propuestos: el radial y el no radial con  $(w_1=w_2=0.5)$ . Los datos y sus correspondientes resultados son mostrados en la tabla 2.

	Datos			BCC-I			Radial			No Radial ( $w_1 = w_2 = 0.5$ )		
DMU	$x_1$	$x_2$	Y	$x_1^*$	$x_2^*$	$y^*$	$\hat{x}_1$	$\hat{x}_2$	$\hat{y}$	$\tilde{x}_1$	$\tilde{x}_2$	$\tilde{y}$
A	6	2	1	6	2	1	3.5	3.5	1	2 (2)	5 (5)	1 (1)
B	4	3	1	4	3	1	4	3	1	2 (4)	5 (3)	1 (1)
C	3	4	1	3	4	1	3	4	1	2 (4)	5 (3)	1 (1)
D	2	5	1	2	5	1	4	3	1	2 (2)	5 (5)	1 (1)
E	4	7	1	2.55	4.45	1	2	5	1	2 (2)	5 (5)	1 (1)
F	5	5	1	3.50	3.50	1	4	3	1	2 (2)	5 (5)	1 (1)
G	5	3	1	4.54	2.73	1	4	3	1	2 (4)	5 (3)	1 (1)
Total	29	29	7	25.59	24.68	7	24.5	24.5	7	14 (20)	35 (29)	7 (7)

Tabla 2. Problema XX1, datos y resultados

Hay que señalar que el modelo radial reduce el consumo de ambas entradas más de lo que lo hace el BCC-I. Como el modelo no radial minimiza la suma de las reducciones de todas las dimensiones de las entradas, puede pasar que para una cierta dimensión de entrada (en el ejemplo la entrada 2) se incremente el consumo total. Para prevenir esto, sólo hay que añadir  $m$  restricciones del tipo  $\theta_1 \leq 1 \forall i$ . Los resultados obtenidos con esas restricciones adicionales son mostradas entre paréntesis.

Finalmente, la figura 2 muestra las proyecciones de las DMUs realizadas mediante los diferentes métodos. Se puede observar que el modelo propuesto siempre proyecta sobre la frontera de eficiencia técnica, aunque las DMUs eficientes técnicas no se proyecten siempre sobre ellas mismas.

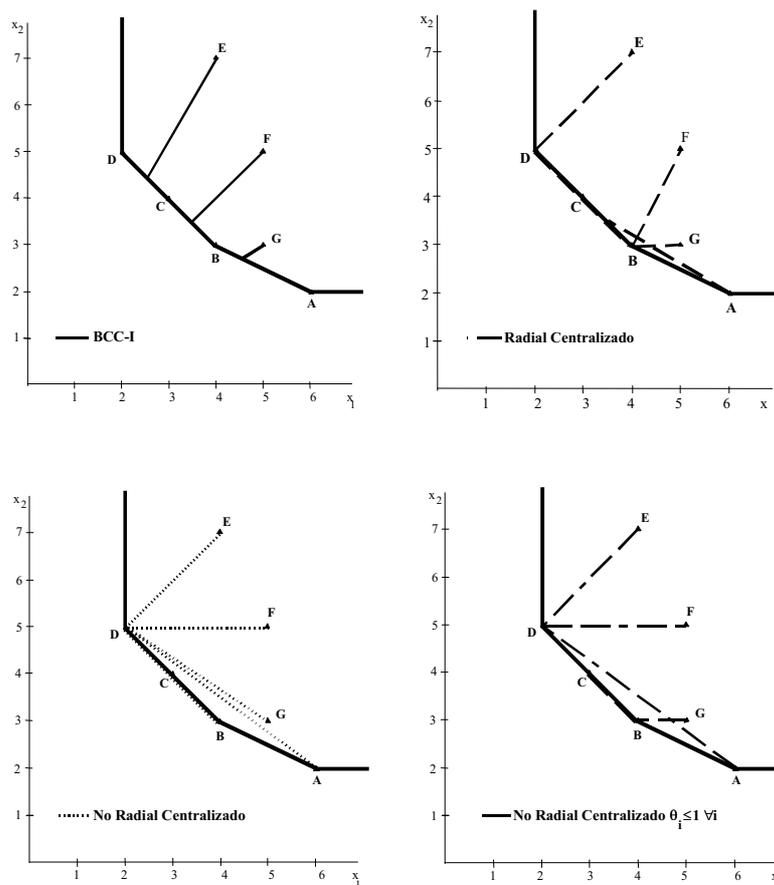


Figura 2. Problema XX1, visualización

## 5 Resumen y conclusiones

Aunque los modelos DEA convencionales fijan objetivos de forma independiente para cada DMU, la metodología también permite la consideración de restricciones y objetivos comunes. En este artículo se han presentado dos tipos de modelos DEA para la reasignación de recursos. Ambos proyectan todas las DMUs sobre la frontera eficiente. El primer tipo busca reducciones radiales del total de los consumos de todas las entradas, mientras que el segundo tipo propuesto reduce de forma separada cada entrada de acuerdo a la preferencia de la estructura. Siendo coherente con el punto de vista de la centralización, se impone la conservación de la suma de salidas. Los modelos propuestos pueden acomodarse a diferentes condiciones del problema de una manera

sencilla añadiendo restricciones adicionales como cotas en los cambios que puedan producirse sobre las entradas y salidas, límites superiores y/o inferiores en las entradas o salidas individuales, etc. Pero se debe tener en cuenta que al utilizar dichas restricciones posiblemente se impida la proyección de todas las DMUs sobre la frontera eficiente, característica ésta en principio más deseable que las anteriores.

## Referencias

- [1] Cooper, W.W., Seiford, L.M. y Tone, K., *Data Envelopment Analysis. A Comprehensive Text with Models, Applications, References and DEA-Solver Software*, Kluwer Academic Publishers, Boston, MA, 2000
- [2] Golany, B., Phillips, F.Y. y Rousseau, J.J., "Models for improved effectiveness based on DEA efficiency results", *IIE Transactions*, **25**, 6 (1993) 2-10
- [3] Golany, B. y Tamir, E., "Evaluating Efficiency-Effectiveness-Equality Trade-offs: A Data Envelopment Analysis Approach", *Management Science*, **41**, 7 (1995) 1172-1184
- [4] Athanassopoulos, A.D., "Goal programming & data envelopment analysis (GoDEA) for target-based multi-level planning: Allocating central grants to the Greek local authorities", *European Journal of Operational Research*, **87** (1995) 535-550
- [5] Athanassopoulos, A.D., "Decision Support for Target-Based Resource Allocation of Public Services in Multiunit and Multilevel Systems", *Management Science*, **44**, 2 (1998) 173-187
- [6] Färe, R., Grabowski, R., Grosskopf, S. y Kraft, S., "Efficiency of a fixed but allocatable input: A non-parametric approach", *Economic Letters*, **56** (1997) 187-193
- [7] Beasley, J.E. (2001) <http://mscmga.ms.ic.ac.uk/jeb/deafixed.html>
- [8] Villa, G. y Lozano, S., "Modelos y Aplicaciones de Análisis por Envoltura de Datos", Documento de Trabajo, 2001.
- [9] Thanassoulis, E. y Dyson, R.G., "Estimating Preferred Target Input-Output Levels Using data Envelopment Analysis", *European Journal of Operational Research*, **56** (1992) 80-97