Aplicación del Filtro de Kalman al Análisis y Predicción de Entornos Productivos Empresariales.

Isabel Fernández Quesada[1]
[1] Lda. en C.C.E.E., E.T.S.I.I.G, Universidad de Oviedo, bel@etsiig.uniovi.es

Director tesis David de la Fuente

RESUMEN

El filtro de Kalman, ha sido desde su aparición en 1960, una herramienta matemática recursiva ampliamente utilizada en el campo de la ingeniería, sobre todo, en temas relacionados con el control. Si bien en los últimos años pueden encontrarse aplicaciones en el ámbito económico, reducida podría calificarse aún su implantación. La intención de la tesis cuyo avance se expone en este trabajo, es su aplicación dentro de entornos productivos y más concretamente, su utilización como herramienta predictiva.

1. Introducción.

La presencia, aleatoria del denominado como "ruido" en términos estadísticos, en el estudio de otras variables de mayor interés perturba el análisis de éstas. Dado que la presencia de tal ruido es considerada y aceptada desde su descubrimiento como injerencia, han sido muchos los trabajos orientados a detectar la naturaleza de sus causas, la dimensión de sus efectos y a eliminar en lo posible los mecanismos que lo generan. A pesar de ello, parece siempre permanecer subyacente algo de él, que debe ser suprimido mediante herramientas más sutiles, entre las cuales se encuentra el filtrado. [1]

El objetivo que se pretende con la utilización de las distintas técnicas de filtrado es el de reducir (filtrar) la influencia perturbadora a la que están sometidas las observaciones que recibe el investigador, a fin de poder llevar a cabo una estimación, lo más fiel posible a la magnitud de interés [2], fidelidad entendida como las consecución de un modelo capaz de reproducir el comportamiento de la variable en estudio con el menor error.

Aunque, remontándonos a la década de los 30 y 40 del siglo XX (con Kolmogorov, Krein y Wiener) las técnicas estadísticas de filtrado se utilizaron para separar *señales* de *ruidos,* es, con la figura de Kalman en los 60, cuando el filtrado incluye una extensión en su acepción al emplearlo para representar variables observables en función de otras no directamente medibles y, según los casos, de mayor interés. Entre ambos estadios de tiempo, muchas han sido las inestimables aportaciones con nombres propios tales como, por nombrar algunos, Markov, Cholesky, Wiener, Kolmogorov, el propio Kalman, Bucy, Bierman, Zadeh, Kailath, Akaike, Harvey y un largo etc.

En cuanto a los campos de la ciencia en los que el filtro de Kalman ha encontrado natural aplicación mencionar los de Ingeniería (principalmente la aeroespacial –reseñar como la más famosa la de la Misión Apollo XI-), Navegación, Control, Meteorología, Hidrología, Finanzas, Economía, etc.

El estudio llevado a cabo en la presente tesis pretende abundar en esta última disciplina, la económica, y más específicamente, en el terreno empresarial, utilizando Filtro de Kalman para modelizar y efectuar previsiones de parámetros y variables de interés, teniendo además como referencia de bondad, resultados obtenidos mediante el uso de otras técnicas estadísticas como la metodología ARIMA de Box y Jenkins o las Redes Neuronales Artificiales.

2. El Filtro de Kalman

El Filtro de Kalman consiste en un procedimiento recursivo de estimación, basado en la teoría de los sistemas dinámicos, cuyo objetivo es, mediante un algoritmo, calcular el estimador óptimo del vector de estados en un instante determinado, basándose para ello en la información disponible por las observaciones realizadas hasta ese momento. A diferencia de otras técnicas de estimación permite representar procesos no estacionarios, no precisando, además, de información previa sobre la historia del proceso ni de observaciones de la variable de estado objeto de estudio, que pueden ser no directamente observables.

2.1 Modelos de espacio de estado.

Los modelos en forma de espacio de estado de procesos aleatorios están basados en la llamada propiedad de Markov, según la cual, el futuro de un proceso con respecto a su pasado es independiente, siempre y cuando nos sea dado su estado presente. En un sistema de este tipo el estado del proceso resume toda la información relativa al pasado que resulta relevante para predecir el futuro [3].

La estructura de un modelo en forma de espacio de estados viene determinada por el conjunto de dos ecuaciones, denominadas como ecuación de transición y ecuación de medidas, más las hipótesis relativas a los ruidos perturbadores y al valor del estado inicial.

- ✓ 1ª ecuación: ecuación de transición

$$x_{t+1} = F_t\, x_t + G_t\, u_t + S_t\, w_t \tag{1}$$

donde: F_t es la matriz de transición de estados de dimensión (n x n), G_t es la matriz de control o de input de dimensión (n x p), S_t es la matriz de ponderación de la perturbación de dimensión (n x s), x_t es el vector de estado de dimensión (n x 1), u_t es el vector de control de dimensión (p x 1), w_t es el vector de la perturbación del sistema de dimensión (s x 1)

- ✓ 2ª ecuación: ecuación de medidas

Puesto que el vector de estado no puede ser observado directamente, se le va a relacionar con una sucesión de observaciones perturbadas por un ruido mediante la siguiente expresión, que recibe el nombre de *ecuación del output o de las observaciones*:

$$Y_t = H_t\, x_t + v_t \tag{2}$$

donde: y_t es el vector de medidas u observaciones de dimensión (m x 1), H_t es la matriz de medidas u observaciones de dimensión (m x n), v_t es el vector de error de medidas de dimensión (m x 1)

✓ hipótesis adicionales

I. el vector de estado correspondiente al instante inicial, x_0, será un vector aleatorio Gaussiano que tiene una media a_0 y una matriz de covarianzas P_0 definida no negativa, es decir:

$$E\{x_0)\} = a_0 \qquad\qquad Var\,\{x_0\} = E\,\{x_0\, x_0'\,\} = P_0 \qquad (3)$$

II. la perturbación w_t es una sucesión de ruido blanco Gaussiano, de media 0 y varianza Q_t, matriz de dimensión (s x s), definida no negativa es decir:

$$E\{w_t\} = 0 \qquad\qquad E\{\,w_t\, w_k'\,\} = \begin{cases} Q_t & \text{si } t = k \\ 0 & \text{si } t \neq k \end{cases} \qquad (4)$$

III. la perturbación v_t es también una sucesión de ruido blanco Gaussiano, de media 0 y varianza R_t, matriz de dimensión (m x m), definida positiva, esto es:

$$E\{\,v_t\,\} = 0 \qquad\qquad E\{\,v_t\, v_k'\} = \begin{cases} R_t & \text{si } t = k \\ 0 & \text{si } t \neq k \end{cases} \qquad (5)$$

IV. Ambos procesos de ruido blanco w_t y v_t se encuentran incorrelados unos con otros en todos los periodos de tiempo:

$$E\{\,w_t\, v_t'\} = 0 \qquad (6)$$

V. Ambos procesos de ruido blanco se encuentran además, incorrelados con el estado inicial es decir:

$$E\{\,w_t\, x_0'\} = 0 \qquad (7)$$

$$E\{\,v_t\, x_0'\} = 0 \qquad (8)$$

Las matrices F_t, G_t, H_t, Q_t y R_t reciben el nombre de *matrices del sistema.* Cuando las matrices del sistema no cambian en el tiempo se dice que el modelo es *invariante con el tiempo* o *tiempo- homogéneo* y los modelos estacionarios representan un caso particular de estos modelos.

2.2 Ecuaciones del filtro

La esencia del Filtro de Kalman estriba en obtener una estimación óptima de un proceso que se irá refinando de forma paulatina, gracias a la retroalimentación obtenida en cada uno de los periodos.

En otras palabras, dados unos valores iniciales, tanto del estado del sistema como de su matriz de covarianzas, el filtro estimará de forma recursiva, el estado del proceso en un momento de tiempo. Este valor resultará necesario para, a su vez, estimar la observación. A través del error cometido en las medidas se obtiene el *feedback* necesario para ir refinando el modelo con el que se estimará un nuevo valor del estado, si bien, este nuevo valor se corresponderá con el del próximo periodo de tiempo.

El proceso descrito tiene una traslación formal consistente en dos tipos de ecuaciones:

- ecuaciones de actualización del tiempo (de transición o de propagación) y
- ecuaciones de actualización de las medidas (o simplemente actualización).

Las primeras serán las responsables de proyectar hacia adelante en el tiempo, el estado actual, por una parte y la covarianza del error por otra, a fin de obtener las estimaciones “a priori” correspondientes al siguiente periodo de tiempo, es decir, sin incorporar la información asociada a la nueva observación del siguiente periodo. Las segundas son el vehículo a través del cual se produce la retroalimentación en el modelo -al incorporar una nueva medida a la estimación a priori se obtendrá la estimación “a posteriori" mejorada-.

Ecuaciones de actualización del tiempo (propagación)	**Ecuaciones de actualización de las medidas (actualización)**
$\hat{x}_{t+1\|t} = F_t \hat{x}_{t\|t} + G_t u_t$ (9) $P_{t+1\|t} = F_t P_{t\|t} F'_t + S_t Q_t S_t'$ (10)	$K_t = P_{t\|t-1} H'_t (H_t P_{t\|t-1} H'_t + R_t)^{-1}$ (11) $\hat{x}_{t\|t} = \hat{x}_{t\|t-1} + K (y_t - H_t \hat{x}_{t\|t-1})$ (12) $P_{t\|t} = (I - K_t H_t) P_{t\|t-1}$ (13)

3. Investigación empírica.

Un posible modo de contemplar las series temporales es como constituyendo el resultado generado por sistemas que transforman información de señales exógenas pasadas y presentes en futuras observaciones. Los estados son resúmenes de la información contenida en las variables exógenas que serán transmitidos por el sistema dinámico de forma que se genere la serie temporal [4].

En un primer estadio de la tesis se analizaron un conjunto de series temporales tomadas de la literatura. En la tabla 1, se exponen las características de las 21 series, así como la fuente de donde se obtuvieron, el número de datos de que se componen y el de las previsiones calculadas.

Serie Temporal		Fuente	Datos	Previsiones	MAPE	
					Kalman	**Otras técnicas**
AL03	Consumo de Electricidad (71-79)	Abraham, 1993	106	12	6.45%	**5.89%(BJ)**
AL04	Ventas de coches en Quebec (60-68)	Abraham, 1993	108	13	11.75%	**7% (BJ)%**
AL09	Mortgage-Loan Difference	Abraham, 1993	159	9	**20.72%**	23.08%(BJ)
AL11	Consumo de Gas (71-79)	Abraham, 1993	106	11	6.52%	**6.09%(BJ)**
AL12	Demanda de Gasolina	Abraham, 1993	192	12	3.34%(BJ)	**2.23%(RN)**
BJ02	Precio de la acción de IBM	Box-Jenkins, 1976	369	9	2.33%	**0.67%(RN)**
BJ06	Wolfer Sunspots	Box-Jenkins, 1976	100	11	28.91%	**15.58%(RN)**
BJ08	Viajeros de Líneas Aéreas	Box-Jenkins, 1976	144	10	2.86%	**2.59%(BJ)**
BJ15	Ventas en un Dpto. de un Almacén	Box-Jenkins, 1976	150	12	0.58%	**0.23%(RN)**
UN01	Serie Simulada	Reilly, 1980	150	10	4.71%	**2.28%(BJ)**
UN02	Serie Simulada	Reilly, 1980	162	10	4.34%	**3.81%(RN)**
UN03	Serie Simulada	Reilly, 1980	150	10	3.38%	**1.74%(BJ)**
UN04	Serie Simulada	Reilly, 1980	161	10	4.81%	**3.41%(RN)**
UN05	Serie Simulada	Reilly, 1980	155	10	1.89%	**1.60%(RN)**
UN06	Serie Simulada	Reilly, 1980	178	10	3.16%	**1.91%(RN)**
UN14	Serie Simulada	Reilly, 1980	147	10	0.72%	**0.62%(RN)**
UN17	Serie Simulada	Reilly, 1980	178	10	**0.63%**	1.46%(RN)
UN19	Serie Simulada	Reilly, 1980	148	10	1.19%	**0.81%(RN)**
UN21	Serie Simulada	Reilly, 1980	146	10	2.25%%	**1.01%(RN)**

Tabla 1. Descripción y procedencia de las series univariantes utilizadas.

La disponibilidad de información previa acerca del fenómeno que se está modelizando (como ocurre cuando lo que se intenta representar corresponde a algún sistema regido por leyes físicas conocidas) ahorra un valioso tiempo en esta etapa. Cuando no es ése el caso, se hará necesario recurrir a algún método de identificación a partir de los datos.

En un primer momento, se siguió la pauta descrita en el libro de Valderrama y Ruiz consistente en: primero ajustar un modelo AR(p) óptimo –utilizando el Criterio de Información de Akaike (AIC) [5]- a los datos. Esto se llevó a cabo mediante el programa SCA. Los valores de los coeficientes autorregresivos servirán para construir una "supermatriz", de la que a su vez se extraen los valores de la matriz S_t. Por otra parte, el orden del polinomio autorregresivo define el tamaño de las dos submuestras en que se transformará la serie original (una de pasado y otra de futuro) sobre las que se realizará un análisis de Correlaciones Canónicas a fin de determinar la dimensión del vector de estado así como los valores de las componentes del resto de matrices, excluidas la R_t y las matrices iniciales. Este análisis se efectuó con el programa BMDP. Identificado el modelo en forma de espacio de estados y mediante el programa O'MATRIX se aplicaba el filtro de Kalman y se obtenían las previsiones.

No en todas las series pudo aplicarse la anterior sucesión de pasos: en algunos casos por no encontrarse un modelo autorregresivo óptimo dado que el AIC decrecía sin punto de inflexión para algún orden concreto, en otros porque la dimensión del estado arrojado por el análisis de las correlaciones canónicas era igual o superior al del tamaño en que se habían subdivido las series, etc.

Más tarde, se instala el programa MATLAB. En la toolbox de identificación se ofrecen dos posibilidades para identificar el modelo de espacio de estados: el de las correlaciones canónicas de Akaike [5, 6, 7] y el método del subespacio.

Los resultados obtenidos respecto a las previsiones de las series recogidas en la tabla 1, salvo en dos casos, no son demasiado buenos cuando se comparan con otras técnicas de análisis como son las Redes Neuronales Artificiales o la metodología ARIMA de Box-Jenkins.

Algo distinto ocurre cuando, en un estadio posterior, se toman datos reales pertenecientes al sector eléctrico español. (El MAPE mostrado en primer lugar corresponde al modo de previsión tradicional mientras que el segundo se refiere a la previsión en tiempo real).

Serie Temporal	Datos	Previsiones	MAPE	
			Kalman	**Otras técnicas**
Precio máximo	318	24	**11.27%** **8.22%**	17.16%(BJ) 9.29%
Precio mínimo	318	24	**23.59%** 22%	28.08% (BJ) **12.32%**
Precio diario	395	24	**7.65%** **7.11%**	12.62%(BJ) 8.03%
Demanda diaria	395	24	**4.24%** **4.40%**	9.76%(BJ) 5.32%
Precio horario	384	24	**9.80%** 5.76%	13.40%(BJ) **4.65%**

Tabla 2. Series pertenecientes al sector eléctrico español

Cinco series son analizadas en este caso, si bien las previsiones se llevan a cabo bajo dos enfoques distintos: uno, calculando un número n de previsiones de una sola vez; otro, obteniendo esas mismas n previsiones, una de cada vez e incorporando el nuevo dato correspondiente a cada nuevo periodo. De los diez casos, únicamente en dos de ellos, Box Jenkins supera al Filtro de Kalman.

Por último, se están analizando en la actualidad cinco nuevas series reales, esta vez, pertenecientes al sector turístico español.

Serie Temporal	Datos	Previsiones	MAPE	
			Kalman	Otras técnicas
Estancia media	96	12	**9.26%** 9.24%	10.90% (BJ) **7.60%**
Grado de ocupación	96	12	3.09% **2.87%**	**2.90% (BJ)** 3.20%
Personal contratado	96	12	5.49% 2.53%	No disponible
Establecimientos abiertos	96	12	78% 45%	**36%(BJ)** **33%**
Pernoctaciones	96	12	5.49% 4.88%	**2.33%(BJ)** **3.28%**

Tabla 3. Series pertenecientes al sector turístico español

De los diez estudios predictivos realizados únicamente en dos de ellos los resultados son superiores con el Filtro de Kalman.

Futuro trabajo

Es intención incorporar al estudio métodos alternativos de identificación que faciliten información a priori sobre la forma y estructura que pueden adoptar las matrices del sistema. Asimismo, se desea explorar la técnica de Máxima Verosimilitud para la estimación de los valores de dichas matrices. Una vez afianzados en el análisis de series univariantes e invariantes en el tiempo se pretende incorporar la variabilidad en los parámetros así como el estudio simultáneo de dos o más variables.

Referencias

[1] Brown, R. G. y Hwang, P.Y.C. (1996) "Introduction to Random Signals and Applied Kalman Filtering: with MATLAB Exercises and Solutions", 3rd Edition.

[2] Valderrama, M.J. y Ruiz, J.C., (1996) "Filtrado de Kalman: aplicaciones en economía e ingeniería". 1ª edición. EUB, S.L. Barcelona.

[3] Abraham, B. y Ledolter, J., (1983) "Statistical Methods for forecasting". Ed. John Wiley & Sons. New York.

[4] Aoki, M., (1990) "State space modeling of Time series". Springer Verlag. Germany

[5] Akaike, H., (1974) "Markovian representation of stochastic Processes and its application to the analysis of Autorregresive Moving Average Processes". Annals of the Institute of Statistical Mathematics. Vol. 26, pp. 363-387.

[6] Akaike H., (1975). "Markovian representation of stochastic Processes by Canonical Variables". SIAM Journal of control, Vol. 13, pp. 162-173.

[7] Akaike H., (1976). "Canonical Correlation Analysis if Time Series and the use of Information Criterion" en el libro de Mehra (1976)