V Congreso de Ingeniería de Organización
Valladolid-Burgos, 4-5 Septiembre 2003

Índice

Objetivos equivalentes en el problema de la evacuación de recintos.

S. Casadesús Pursals[1], F. Garriga Garzón[2]
[1]Dep. de Estadística e Inv. Operativa, UPC, c/. Colom 11, 08222 Terrassa, salvador.casadesus@upc.es
[2]Dep. de Organización de Empresas, UPC, c/. Colom 11, 08222 Terrassa, federico.garriga@.upc.es

RESUMEN

En los problemas de la evacuación de edificios es posible plantear diferentes objetivos, se reflejan en magnitudes que cuantifican la eficacia de una determinada estrategia de evacuación, en cualquier caso los objetivos deben referirse a la totalidad de los ocupantes, no tienen sentido los planteamientos individuales. Se plantean los siguientes objetivos: 1) Determinar el tiempo mínimo necesario para que la totalidad de ocupantes puedan situarse en un destino seguro. 2) Obtener el número máximo de personas capaces de abandonar el edificio en cualquier instante. 3) Hallar el valor mínimo del tiempo total empleado por todos los ocupantes en la evacuación del edificio, o bien el valor del tiempo medio de evacuación. En el caso de la evacuación de un recinto, puede observarse el interés o conveniencia de cumplir los tres objetivos, existe la fortuna que se satisfacen simultáneamente, aspecto que se analiza en el presente trabajo.

Palabras clave*: Evacuación de edificios, optimización de la evacuación, objetivos en el problema de la evacuación de edificios.*

1. Introducción.

Sea un recinto ocupado por k personas, que dispone de n salidas independientes, en cada una de ellas se registra un flujo $f_j(t)$, el número de personas x_j que abandonan el recinto por la salida j para dirigirse hasta un lugar seguro situado a una distancia l_j.

El problema de la evacuación consiste en determinar el número x_j de personas que deben utilizar cada salida para que la seguridad de todos los ocupantes del recinto sea máxima, concepto que debe expresarse en forma de diferentes objetivos.

La solución dependerá de las características personales de los ocupantes (dimensiones, capacidad de locomoción, etc..), las condiciones geométricas del recinto (número de salidas, anchuras mínimas de paso, longitud máxima de los recorridos de evacuación, etc) y la propia dinámica de la evacuación (actitudes personales, evolución del escenario, etc...).

2. Objetivos en el problema de la evacuación de un recinto.

Los objetivos de los problemas de evacuación se establecen para todo el colectivo, y tratan de lograr la máxima seguridad de las personas que ocupan el recinto desde una perspectiva global, se trata de definir magnitudes capaces de cuantificar este propósito. Aunque parezca contradictorio, es posible que las estrategias de evacuación que resultan de la optimización global, no supongan individualmente para todos los ocupantes el tiempo mínimo de evacuación, en estas condiciones a algunos individuos podría corresponderles abandonar el edificio por una determinada salida, existiendo algún recorrido que pudiera situarles en el destino en un tiempo menor.

Desde esta óptica colectiva se formulan los siguientes tres objetivos:

- Minimizar el tiempo necesario para que la totalidad de los ocupantes puedan salir del edificio para dirigirse hasta un destino seguro.
- Maximizar, en cualquier instante, el número de personas que han abandonado el edificio.
- Minimizar el tiempo total empleado por todos los ocupantes en salir del edificio, se trata del coste de tiempo que supone la evacuación de la totalidad de los ocupantes.

A simple vista los tres objetivos parecen necesarios, sin embargo cabe preguntarse: ¿Cuál es más importante? o bien ¿Cuál de ellos aporta mayor seguridad de los ocupantes?. A menudo se presentan problemas en los cuales varios objetivos son antagónicos, en este caso existe la fortuna de poderlos cumplir simultáneamente.

2.1 Tiempo mínimo de evacuación.

Un objetivo razonable en un problema de evacuación, es que la totalidad de los ocupantes puedan estar situados en un destino seguro lo antes posible. Si midiéramos el tiempo que transcurre desde que se produce la señal de alarma hasta que el último ocupante abandona el edificio, se trata de minimizar dicha magnitud.

La función de evacuación t_j (x_j) indica el tiempo que tardarán en abandonar el recinto x_j personas si utilizan la salida j, se cumple que es una función estrictamente creciente.

$$\begin{aligned} t_j(x_j) &\geq 0 \quad \forall x_j \\ t_j(x_j) &= 0 \ \text{ si } \ x_j = 0 \end{aligned} \tag{1}$$

Si en un recinto existen n salidas independientes, habrá n recorridos diferentes o rutas de evacuación, el tiempo z de evacuación será la duración del recorrido de salida más largo, definido por el instante en el cual el último ocupante abandona el recinto.

$$z = \text{Max} \ \left[t_1(x_1), \ . \ . \ . \ t_n(x_n) \right] \tag{2}$$

El objetivo que se plantea es que el tiempo z sea mínimo, resulta la función objetivo (3).

$$\text{Min} \ (z) \tag{3}$$

El problema presenta varias restricciones (4): Debe cumplirse que el número total de personas que abandonan el recinto entre todas las rutas sea igual al número de ocupantes k y el número de personas x_j que utilizan una determinada ruta necesariamente debe ser un valor entero y positivo.

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + \ . \ . \ . \ + x_n = k \\ x_1 \geq 0, \ x_2 \geq 0 \ , \ . \ . \ . \ . \ , \ x_n \geq 0 \end{aligned} \tag{4}$$

La resolución se efectúa admitiendo para x_j un valor real, como necesariamente debe ser número entero, el final del proceso consiste en aproximar los posibles valores para la obtención de la solución definitiva: Cumpliendo la condición de mínimo y la restricción (4).

2.2 Maximizar los flujos de salida.

Otro posible objetivo, tan razonable como el anterior, es que el número de personas que han abandonado el recinto en cualquier instante z se máximo, o la situación equivalente que el número de personas que todavía permanecen en el interior del edificio sea mínima.

La función de evacuación inversa $p_j(z)$, indica en número de personas que abandonan el recinto utilizando la salida j en un tiempo z, se define para cada una de las salidas.

Si en la salida j existe un flujo $f_j(z)$, variable y función del tiempo, la función de evacuación inversa de una salida j es posible obtenerla directamente a partir de la expresión (5).

$$p_j(z) = \int_0^z f_j(z)\, d(z) \tag{5}$$

Si el flujo de circulación que se producen en cada una de las salidas es exclusivamente en el sentido de salida, resulta (6).

$$f_j(z) \geq 0 \tag{6}$$

entonces en la función de evacuación inversa siempre se cumplirá (7).

$$p_j(z) \geq 0 \quad \forall\, j \tag{7}$$

La función de evacuación inversa total P(z), indica el número personas que pueden abandonar el recinto en un tiempo z utilizando todas las salidas. Si no existen demoras en el inicio de la evacuación y no se consideran recorridos, la función de evacuación total es la suma de las funciones de evacuación inversa de cada una de las salidas:

$$P(z) = p_1(z) + p_2(z) + ... + p_j(z) \tag{8}$$

De esta forma, se pretende que en cualquier instante la función de evacuación total P(z) sea máxima. El objetivo será que el número total de personas que han abandonado el recinto en un tiempo z sea máximo, resulta la función objetivo (9)

$$\text{Max} \quad P(z) \tag{9}$$

Otro planteamiento equivalente al enunciado, consiste en definir la ocupación que existe en el recinto en cualquier instante z, en este caso corresponde a obtener la mínima ocupación (10).

$$\text{Min} \quad \left(k - P(z) \right) \tag{10}$$

El problema definido por los objetivos (9) ó (10) presenta las mismas restricciones que las del apartado anterior, definidas en (4).

2.3 Minimizar el tiempo total empleado en evacuación.

Otro objetivo a plantear en el problema de la evacuación, similar a los dos anteriores, consiste en contabilizar el tiempo empleado por todos los ocupantes en abandonar el recinto. Se trata de definir una función de los costes de evacuación, una forma simple de medir dichos costes consiste en sumar el tiempo que tarda cada individuo en la evacuación.

Se define la función $q_j(x_j)$ que contabiliza el tiempo que tardan en abandonar el recinto las x_j personas que utilizan la salida j. Mediante (11) se obtiene dicha función para cada una de las salidas.

$$q_j(x_j) = \int_0^{x_j} t_j(x_j)\,d(x) \tag{11}$$

Si el recinto dispone de n salidas, el coste total de la evacuación será el de la expresión (12), que corresponde a la suma de los costes de evacuación de x_j personas por cada una de las j salidas.

$$Q(x) = q_1(x_1) + q_2(x_2) + ... + q_j(x_n) \tag{12}$$

siendo x el número total de personas que abandonan el recinto (13)

$$x = x_1 + x_2 + ... + x_n \tag{13}$$

Se trata de obtener la estrategia de evacuación que consiga un mínimo coste, es decir aquella cuya suma de tiempos invertidos en la evacuación sea mínimo, se define en la función objetivo (14), función de $x_1, x_2, ... , x_n$.

$$\text{Min} \quad Q(x) \tag{14}$$

De forma similar, puede obtenerse la función de coste de la evacuación en función del tiempo z a partir de la función de evacuación inversa, ello presenta algunas ventajas. Nuevamente se debe obtener el coste de la evacuación, efectuando la suma del número de personas que abandona el recinto en cada instante por el tiempo z que les supone.

En la forma que se ha definido la función inversa $p_j(z)$, se trata de conocer la función $\rho(z)$, la tasa unitaria de salida, definida en (15)

$$\rho_j(z) = \frac{d\left(p_j(z)\right)}{d(z)} = f_j(z) \tag{15}$$

Se obtiene la función de coste $q_j(z)$ de la salida j (16), indica el coste de la evacuación de $p_j(z)$ en un tiempo z.

$$q_j(z) = \int_0^{z} z \times \left(f_j(z)\right) d(z) \tag{16}$$

Se halla la función Q(z) que contabiliza el coste total de la evacuación (17), utilizando las n salidas, función de una única variable z.

$$Q(z) = q_1(z) + q_2(z) + ... + q_n(z) \tag{17}$$

Se trata de obtener la estrategia de evacuación que consiga un mínimo coste, se define la función objetivo (18).

$$\text{Min} \quad Q(z) \tag{18}$$

En cualquier caso se trata de minimizar una de las funciones objetivo, definidas en (14) y (18), en ambos casos sujetas a las restricciones definidas en (4). Se obtienen los mismos resultados.

3. Equivalencia de los objetivos.

Se demuestra que los tres objetivos que se han definido son equivalentes, y conducen a la misma solución del problema si las funciones de evacuación cumplen determinadas condiciones.

Se considera el caso en el cual la función de evacuación $t_j(x_j)$, depende exclusivamente del flujo f_j registrado en la salida j y del número de personas x_j que utilizan la ruta j, y no existen recorridos de evacuación.

Si el flujo f_j que se registra en la ruta j, es constante durante todo el tiempo que dura la evacuación, resulta que $t_j(x_j)$ será una función lineal cuya pendiente será el inverso del valor del flujo f_j.

$$t_j(x_j) = \left(\frac{1}{f_j}\right) \times x_j \tag{19}$$

Conocida la función de evacuación $t_j(x_j)$ y existiendo su función inversa $p_j(z)$, obtenida directamente (20).

$$p_j(z) = f_j \times z \tag{20}$$

El número total de personas capaces de abandonar el recinto en un tiempo z será P(z), entonces a partir de la expresión (8) es posible conocer el tiempo mínimo necesario para la evacuación de P(z) personas en un tiempo z, resulta (21)

$$z = \frac{P(z)}{\left(\sum_{j=1}^{j=n} f_j\right)} \tag{21}$$

Si en un recinto existen n salidas independientes, cada una de ellas con un flujo f_j constante, el flujo total de salida del recinto F, será la suma de los flujos (22).

$$F = f_1 + f_2 + ... + f_n \tag{22}$$

El conocimiento del flujo total de salida F, permite obtener una estimación del tiempo mínimo de evacuación z*, para un número de k ocupantes resulta (23)

$$z^* = \frac{k}{F} \tag{23}$$

El conocimiento del tiempo de evacuación del recinto, permite determinar a partir de la ecuación (19) la asignación óptima de ocupantes hacia cada una de las salidas (24).

$$x_j * = t_j(x_j) \times f_j = (z^*) \times f_j = \left(\frac{f_j}{F}\right) \times k \tag{24}$$

Puede observarse, que asignar más ocupantes a una determinada salida supone incrementar el tiempo de evacuación z, por ello si z > z*, z deja de ser un tiempo mínimo de evacuación del recinto, entonces la asignación x_j no puede ser mayor que la asignación óptima x_j*.

En un recinto, en condiciones de flujo constante, para lograr el tiempo mínimo de evacuación el número de ocupantes x_j que debe asignarse a cada salida j, será proporcional a la relación que existe entre el flujo f_j que se registra en la salida j y el flujo total de salida del recinto F.

En la segunda propuesta cuyo objetivo era "Minimizar la ocupación del recinto en cualquier instante" (10) o el objetivo equivalente de "Maximizar directamente el número de personas que han abandonado el recinto en cualquier instante" (9) conduce a la misma solución que el objetivo anterior.

Sea z un valor de tiempo cualquiera, cuando dicho tiempo z se iguala al correspondiente con el valor óptimo z*

$$z = z^* \tag{25}$$

se trata de determinar el número máximo de personas capaces de abandonar el recinto, se utiliza la expresión definida en la función objetivo (9).

Entonces se observa que si $f_j(z)$ es constante, a partir de (5) se obtiene que el número de personas capaces de abandonar el recinto por la salida j, si P(z) definida en (8) es la suma de las funciones de evacuación inversa de cada una de las salidas y $p_j(z)$ un conjunto de funciones definidas positivas, según (26)

$$\mathrm{Max}\left(P(z)\right) = \mathrm{Max}\left(\ p_1(z^*) + p_2(z^*) + ... + p_j(z^*)\right) \tag{26}$$

entonces para maximizar P(z), necesariamente debe cumplirse que sean máximas las funciones de evacuación inversa de cada una de las salidas (27)

$$\forall\, j\ \ \mathrm{Max}\left(p_j(z^*)\right) \tag{27}$$

A partir de (24) se obtiene el número máximo de personas que pueden abandonar el recinto por cada una de las salidas, resulta x_j*.

Y en definitiva, el número máximo de ocupantes que pueden abandonar el recinto en un tiempo z* (28) es igual a k.

$$x_1^* \; + \; x_2^* \; + \; . \; . \; . \; + \; x_n^* \; = \; k \tag{28}$$

Sencillamente se ha encontrado que en el tiempo de evacuación óptimo z*, el número máximo de personas capaces de abandonar el recinto es k, el número total de ocupantes.

Finalmente para la tercera propuesta, cuyo objetivo era "Minimizar el coste total de la evacuación" según la función objetivo (14) se trata de hallar la coincidencia con los resultados anteriores.

En esta situación, en la cual el flujo en cada una de las salidas es constante, sustituyendo la expresión de la función de evacuación de una salida (19) en la expresión de la función del coste de la evacuación (11), se obtiene (29)

$$q_j(x_j) = \int_0^{x_j} t_j(x_j)\, d(x) = \frac{(x_j)^2}{2 f_j} \tag{29}$$

Si el recinto dispone de n salidas, el coste total de la evacuación será según la expresión (12), la suma de los costes de evacuación de cada una de las salidas (30).

$$Q(x_1 + x_2 + \quad + x_n) = q_1(x_1) + q_2(x_2) + ... + q_j(x_n) = \frac{(x_1)^2}{2f_1} + \frac{(x_2)^2}{2f_2} + ... + \frac{(x_n)^2}{2f_n} \tag{30}$$

Si además existe la restricción (4), concretamente:

$$x_1 \; + \; x_2 \; + \; . \; . \; . \; + \; x_n \; = \; k \tag{31}$$

Se procede a hallar el valor mínimo de $Q(x_j)$, en este caso la función lagrangiana será (32)

$$Q(x_j, \lambda) = \frac{(x_1)^2}{2f_1} + \frac{(x_2)^2}{2f_2} + ... + \frac{(x_n)^2}{2f_n} + \lambda(x_1 + x_2 + ... + x_n - k) \tag{32}$$

aplicando Kuhn-Tucker y resolviendo se llega a obtener la solución final (33). Resulta para cada una de las j salidas.

$$x_j^* = \left(\frac{f_j}{F}\right) k \tag{33}$$

Con ello se prueba la coincidencia de objetivos en los tres casos considerados. La solución del problema del coste de la evacuación es idéntica a la correspondiente minimización del tiempo de evacuación, y en este tiempo mínimo se ha probado que el número de individuos capaces de abandonar el recinto es exactamente el número de ocupantes k.

Referencias

[1] Berlin, G. N., "A network analysis of building egress system", ORSA/TIMES meeting Washington, 1980, 8 p.

[2] Brown, J. R., "The knapsack sharing problem", Operation Research 27(2), March-April 1979, p 340-355.

[3] Casadesús, S., Modelos matemáticos utilizados en el estudio de la evacuación de edificios. Cuadernos de Seguridad, Enero 1998, 41-46.

[4] Casadesús, S./ Garriga, F., "Procedimiento grafico para la optimización de la evacuación de un recinto", IV Congreso de ingeniería de organización, Sevilla, Septiembre 2001.

[5] Francis, R. L., "A simple graphical procedure to estimate the minimum time to evacuate a building", Society of Fire Protection Engineers, Technology Report 1979-5, 1979, 14 p.

[6] Francis, R. L., "A 'Uniformity principle' for evacuation route allocation", Journal of Research of National Bureau of Standards Vol.86 September-October, 1981, pp. 509-513.