VIII Congreso de Ingeniería de Organización
Leganés, 9 y 10 de septiembre de 2004

El espacio de estados en Econometría

Segismundo Izquierdo Millán, Cesáreo Hernández Iglesias, Javier Pajares Gutiérrez

[1] Dpto. de Organización de Empresas y Comercialización e Investigación de Mercados. Escuela Técnica Superior de Ingenieros Industriales. Universidad de Valladolid. Paseo del Cauce s/n, 47011 Valladolid. segis@eis.uva.es, cesareo@eis.uva.es, pajares@eis.uva.es

Resumen

El espacio de estados resulta ser un tipo de formulación matemática que presenta una serie de características y herramientas muy apropiadas para su utilización en econometría lineal. Aunque proviene del campo de la ingeniería, en este artículo se revisan cuáles son esas características que lo hacen especialmente interesante en econometría: la capacidad de formular modelos de componentes no observados, las herramientas para realizar una especificación tipo "caja negra", basada en observaciones, y las facilidades para llevar a cabo la estimación de parámetros. A lo largo del artículo se discuten estas características e instrumentos, principalmente el filtro de Kalman (enfoque de estimación "universal" Kalman-máxima verosimilitud en modelos lineales) y los métodos de subespacios (que cubren la estimación de parámetros y la especificación basada en observaciones).

Palabras clave: Espacio de estados. Identificación de sistemas. Kalman. Subespacios.

1. Introducción

El espacio de estados con parámetros constantes (nos limitaremos a este caso, sin considerar modelos de parámetros variables) constituye una de las posibles formulaciones matemáticas generales para un sistema estocástico lineal, y presenta características que lo hacen especialmente apropiado para su utilización en econometría. En este artículo discutimos cuáles son estas características.

2. Identificación de sistemas y econometría

Siguiendo al profesor Lennart Ljung (1999), podríamos definir la identificación de sistemas como el arte de crear modelos matemáticos sencillos y precisos para sistemas complejos a partir de series temporales de observaciones "ruidosas". Parece poco discutible la utilidad de disponer de modelos para los sistemas en estudio, puesto que es en base a modelos como "entendemos" el mundo que nos rodea. Si además el modelo es expresable matemáticamente, podemos utilizarlo (y quizá validarlo) cuantitativamente.

Podemos considerar las siguientes etapas de la identificación de sistemas (figura 1):

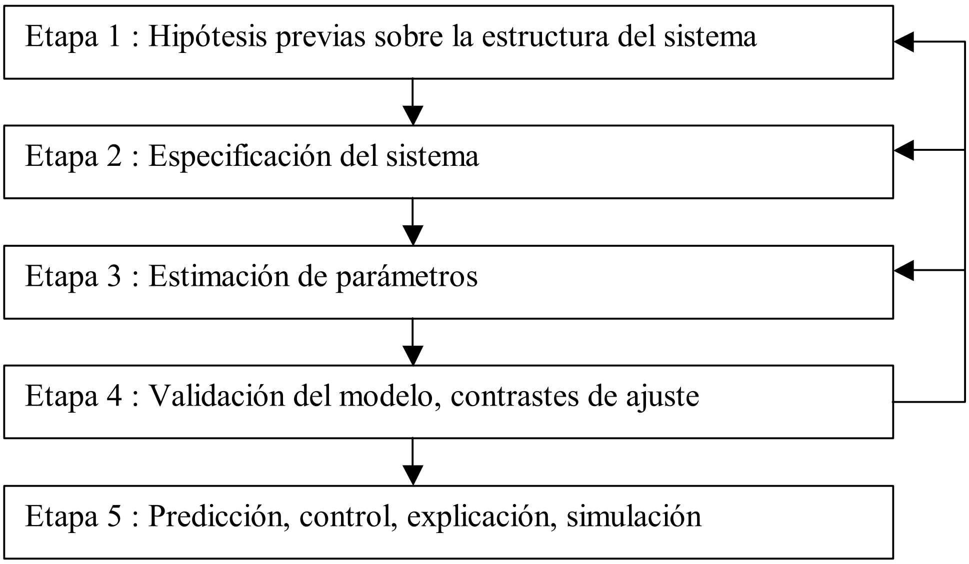

Figura 1. Fases de la identificación de sistemas

Intriligator, Bodkin y Hsiao (1996) definen la econometría como la parte de la economía que se ocupa de la estimación empírica de relaciones económicas. La figura 2 es especialmente ilustrativa respecto a este enfoque.

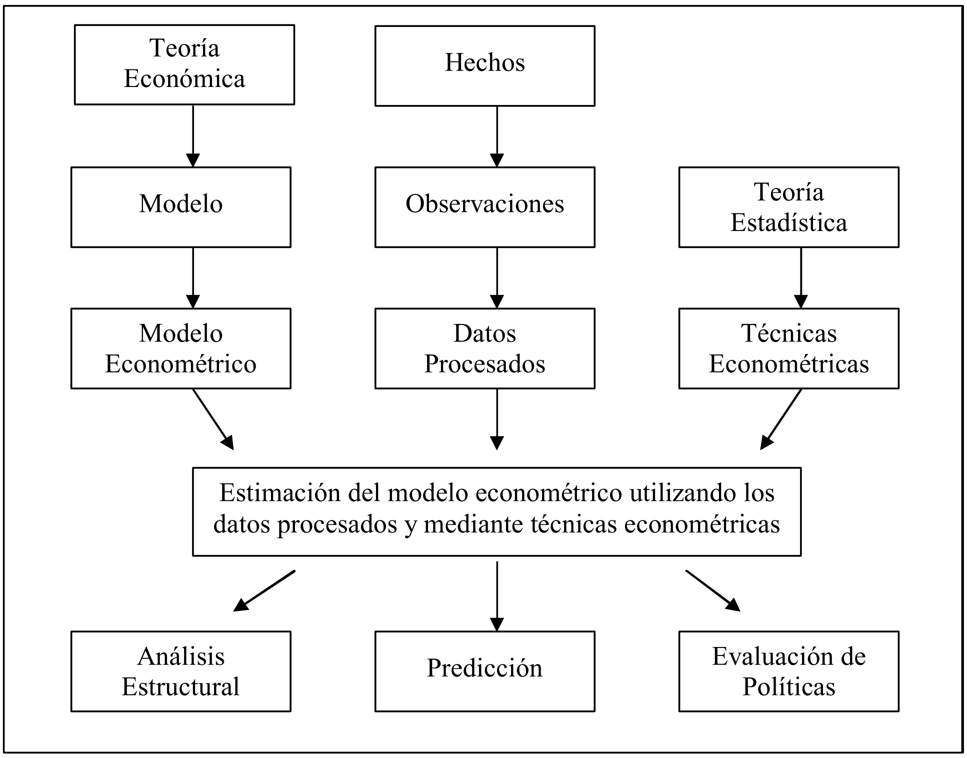

Figura 2. El enfoque econométrico. Basado en Intriligator, Bodkin y Hsiao (1996).

La formulación del modelo se trata en realidad de un proceso iterativo: si el modelo no es validado se procede a modificarlo o reformularlo. Hacemos notar que, conforme a la figura 2, el modelo econométrico se alcanza basándose en una teoría económica, que es plasmada mediante algún tipo de formulación matemática.

El enfoque de obtención de modelos paramétricos en identificación de sistemas es distinto al enfoque que utiliza la econometría basada en modelos o "estructural". La identificación de sistemas parte de formulaciones o tipos de modelos matemáticos flexibles y generales (modelos ARMA, espacio de estados, redes neuronales, etc.) y obtiene una representación particular lo más sencilla posible que "capte" las características o relaciones dinámicas entre las variables del sistema observado. El enfoque estructural, en cambio, parte de teorías o hipótesis sobre el "proceso generador" de las observaciones, que se traducen en unas ecuaciones matemáticas que relacionan entre sí las variables del sistema.

Sin embargo, la econometría también ha abordado la cuestión de especificación de modelos basándose en observaciones, propia de la identificación de sistemas. El ejemplo más conocido es posiblemente la metodología Box-Jenkins de identificación de modelos ARMA.

Para modelos paramétricos, tanto el enfoque de identificación de sistemas como el enfoque estructural seleccionan algún tipo de formulación matemática y proporcionan en un primer paso un conjunto de ecuaciones con un número limitado de parámetros a estimar, o modelo especificado. Valores apropiados para esos parámetros desconocidos son entonces calculados mediante algún procedimiento de estimación.

Ninguno de los dos enfoques de especificación está exento de riegos. La especificación estructural impone una serie de restricciones que, si son ciertas, permiten estimar mejor los parámetros del modelo, ya que los parámetros fijados a priori no se ven sujetos a variabilidad muestral, y el resto puede ser estimado con mayor precisión. Además, estos modelos pueden venir respaldados por principios cuya validez empírica está contrastada históricamente más allá de lo que resulta posible mediante el rango de observaciones del sistema en estudio. Sin embargo, conviene no olvidar que la forma estructural de las ecuaciones que relacionan las variables se ha impuesto desde un punto de vista teórico, en forma de hipótesis del modelo. Si los datos prácticos observados no se corresponden con las características del modelo teórico especificado, quizá podamos rechazar, por improbables, las hipótesis del modelo. Por el contrario, si las observaciones sí se ajustan al modelo teórico, todo cuanto podemos aceptar es que la realidad observada no ofrece suficiente evidencia en contra de nuestras hipótesis.

La especificación basada en observaciones asegura, en cierta medida, que el modelo especificado es capaz de captar la estructura subyacente a las observaciones en las que se ha basado la especificación. Sin embargo, el modelo sólo será válido si en el futuro las series observadas mantienen las mismas características estadísticas presentes en el conjunto de observaciones utilizado para la especificación.

Deistler (1996) realiza un análisis histórico de la inclinación de los económetras hacia uno u otro tipo de especificación. Entre otras consideraciones interesantes, cita la decepción provocada por los grandes modelos estructurales es los años 70, al comprobar que sus predicciones eran superadas por las de sencillos modelos univariantes identificados mediante la metodología Box-Jenkins. Según Deistler, no existe actualmente una opinión clara sobre qué aproximación es preferible, si bien existe una tendencia a la especificación estructural cuando los objetivos son el análisis económico, la simulación de políticas o la predicción a medio plazo, y una tendencia a la especificación basada en observaciones, tipo VAR o con modelos "caja negra", cuando se busca predicción a corto plazo.

Las herramientas desarrolladas sobre la formulación del espacio de estados abarcan tanto la especificación (basada en observaciones -enfoque "caja negra"- o estructural), como la estimación de parámetros.

3. Ecuaciones e interpretación del espacio de estados

Una formulación de un modelo para un sistema dinámico en el espacio de estados con coeficientes constantes es una formulación paramétrica lineal en la que existe un vector de variables auxiliares o estados ($\mathbf{x}_t$) que condensa en cada instante t toda la información histórica del sistema relevante de cara a su evolución futura. Además, la dinámica del sistema queda recogida en la ecuación de transición de estados, que es una ecuación vectorial en diferencias de primer orden. El vector de estados puede interpretarse como un conjunto de n componentes dinámicos no directamente observados, subyacentes a m series observadas.

Para sistemas lineales estocásticos de parámetros constantes, las ecuaciones de una formulación en el espacio de estados pueden expresarse:

$$z_{t+1} = \boldsymbol{A}\, z_t + \boldsymbol{K}\, \boldsymbol{e}_t \qquad \text{Ecuación de transición de estados} \qquad (1)$$

$$\boldsymbol{y}_t = \boldsymbol{C}\, z_t + \boldsymbol{e}_t \qquad \text{Ecuación de observaciones} \qquad (2)$$

donde $\boldsymbol{y}_t$ es el vector de observaciones, de dimensión m; z_t es el vector de estados, de dimensión n; $\mathbf{e}_t$ es ruido blanco de esperanza $E(\mathbf{e}_t) = \mathbf{0}$ y matriz de covarianzas $E(\mathbf{e}_t\, \mathbf{e}'_t) = \mathbf{R}$, y $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{K}$, $\boldsymbol{C}$ son matrices de coeficientes (parámetros) constantes y dimensiones apropiadas.

La formulación del espacio de estados es equivalente a otras formulaciones alternativas generales paramétricas de un sistema lineal, como las funciones de transferencia racionales o las formulaciones VARMA, y existen métodos desarrollados para expresar un modelo conforme a las distintas formulaciones - por ejemplo, véase Aoki y Havenner (1991) o Terceiro (1990) para una forma de pasar al espacio de estados un modelo econométrico estructural lineal en forma reducida. Con carácter más específico, Izquierdo, Hernández y Pajares (2003) reflexionan sobre la aplicación del espacio de estados a modelos de datos de panel y modelos de cointegración-.

Pese a la equivalencia que existe entre las distintas formulaciones, existen algoritmos y métodos de identificación desarrollados específicamente para trabajar con cada tipo de formulación. Cuando el modelo es desconocido y nuestro objetivo es identificar un modelo apropiado a partir de observaciones, los distintos métodos de identificación conducirán (posiblemente) a la obtención de distintos modelos.

En cuanto a la interpretación, las características del espacio de estados permiten postular (especificar) y estimar modelos de componentes dinámicos no observados. Estos modelos pueden corresponder a una descomposición de la variable observada en términos más fácilmente interpretables y/o a una composición de factores dinámicos comunes (menores en número que el número de series observadas). En este contexto entran los modelos de series temporales denominadas "estructurales" (Harvey, 1989) o las habituales descomposiciones ciclo-tendencia, tan ligadas con la tradición econométrica. En particular, la cointegración corresponde a una descomposición de las series no estacionarias observadas en un conjunto de ciclos estacionarios y tendencias no estacionarias, con un número de tendencias comunes no estacionarias inferior al número de series observadas.

4. El espacio de estados y el filtro de Kalman

La estimación de parámetros de un modelo formulado en el espacio de estados cuenta con una potente técnica de uso general, que es la estimación máximo verosímil (pseudo máximo verosímil, si las perturbaciones no son gaussianas) con función de verosimilitud calculada mediante el filtro de Kalman (figura 3). La aplicación más evidente del filtro de Kalman, conocido el modelo, es la predicción, pero si los parámetros del modelo deben estimarse, la formulación de un modelo en el espacio de estados y la aplicación del filtro de Kalman constituyen una opción general para el cálculo de estimadores pseudo-máximo-verosímiles de los parámetros de un modelo económico.

Como indica Vargas (1999), desde el punto de vista teórico podemos considerar que este enfoque (formulación en el espacio de estados + filtro de Kalman para el cálculo recursivo de la función de verosimilitud + maximización de la función de verosimilitud) resuelve el problema de la estimación máximo verosímil de parámetros para cualquier modelo que admita una formulación en el espacio de estados. Podemos considerar el filtro de Kalman como una herramienta que permite construir un "estimador universal" de parámetros en modelos econométricos lineales: bastaría con formular en el espacio de estados el modelo con el que estemos trabajando para proceder a su estimación.

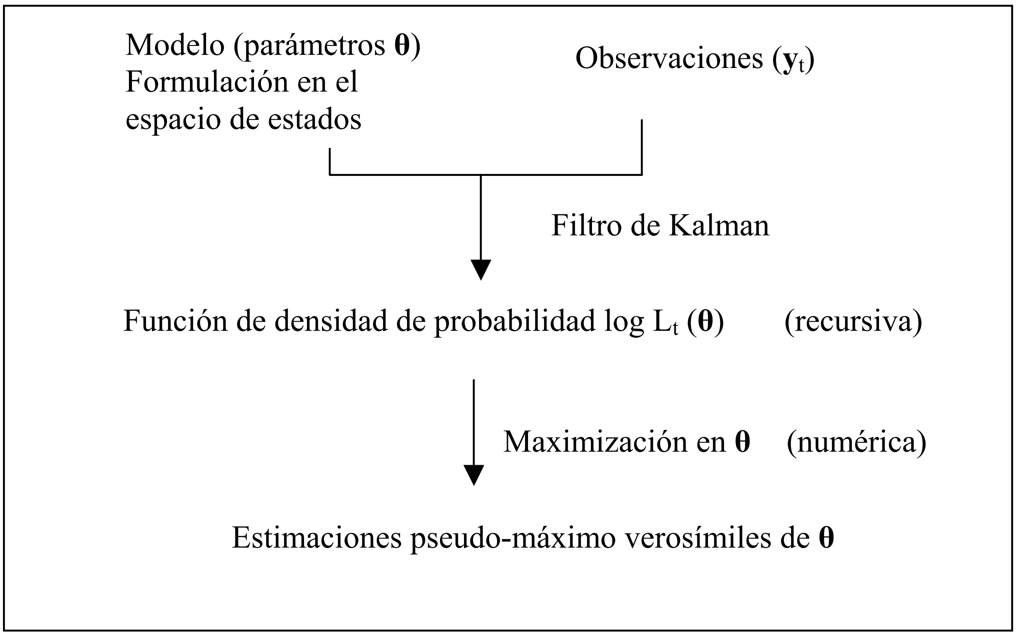

Figura 3. Utilización del filtro de Kalman para la obtención de estimadores pseudo máximo verosímiles de los parámetros de un modelo

La estimación Kalman-máxima-verosimilitud plantea, sin embargo, una alta carga computacional y posibles problemas asociados a la búsqueda iterativa por métodos numéricos del máximo de una función de verosimilitud que puede resultar altamente no lineal y con múltiples máximos locales. Además, la formulación en el espacio de estados de un modelo que inicialmente se ha especificado usando otro tipo de formulación matemática suele implicar una serie de restricciones sobre los parámetros de la formulación en el espacio de estados que deben ser tenidas en cuenta en la estimación. También está el problema de la identificabilidad del modelo, que se aborda mediante la elección de una forma canónica, pero sin que las distintas opciones sean equivalentes. En definitiva, pese a su atractivo como estimador universal, es un enfoque que dista de ser sencillo o estar exento de complicaciones.

Otra de las herramientas más potentes desarrolladas sobre el espacio de estados son los denominados métodos de subespacios, que abordan la especificación basada en observaciones y la estimación de los parámetros del modelo.

5. El espacio de estados y los métodos de subespacios

Como ya hemos indicado, la especificación de un modelo para un sistema a partir de observaciones del mismo es una cuestión de identificación de sistemas que presenta gran interés en econometría. La identificación de sistemas lineales en econometría se ha centrado tradicionalmente en la formulación ARMA y sus variantes, pero el espacio de estados ofrece una alternativa interesante y diversas herramientas para la especificación del modelo.

Especificar un modelo en el espacio de estados se reduce a encontrar el valor de un único hiperparámetro: el orden del sistema, que es la dimensión (n) del vector de estados (para una representación mínima).

Los algoritmos de subespacios permiten especificar un modelo en el espacio de estados y proporcionan una rápida estimación de los parámetros del sistema, que puede usarse como alternativa a otros procedimientos de estimación recursivos (Kalman + máxima verosimilitud, por ejemplo), más lentos y problemáticos, o para proporcionar valores iniciales adecuados para los mismos.

Posiblemente, la mayor aportación de los métodos de subespacios consiste en haber establecido y combinado las siguientes dos ideas:

1. Que es posible estimar el orden del sistema y el valor de una secuencia de estados (tipo Kalman) a partir de observaciones del sistema y en un solo paso (no recursivos), sin necesidad de conocer las matrices del sistema (sin conocer ni aplicar el filtro de Kalman).

2. Que, una vez conocida una secuencia de estados, todas las matrices del sistema son estimables por mínimos cuadrados.

La diferencia entre el enfoque de estimación de los algoritmos de subespacios y el enfoque de estimación basado en el filtro de Kalman + máxima verosimilitud puede observarse en la figura 4.

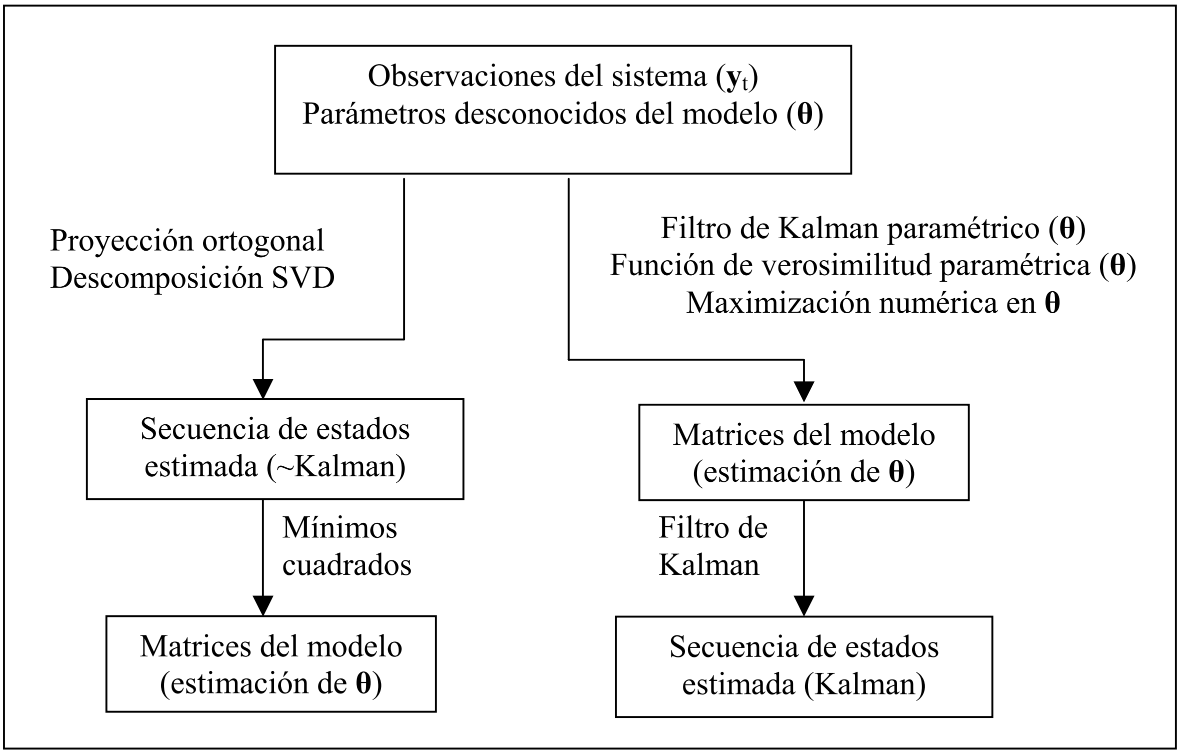

Figura 4. Diferencia entre la estimación por métodos de subespacios y la estimación basada en el filtro de Kalman + máxima verosimilitud. La parte izquierda resume el enfoque de los métodos de subespacios, en los que una secuencia de estados (tipo Kalman) es calculada en primer lugar y a partir de observaciones del sistema, sin necesidad de conocer o estimar previamente las matrices del modelo. Basado en Van Oberschee y De Moore (1996)

En comparación al enfoque Kalman-máxima-verosimilitud, destacamos las principales diferencias en la aplicación de los métodos de subespacios:

1.- La estimación no requiere una optimización iterativa de una función no lineal. Se emplean, en cambio, métodos robustos de álgebra numérica lineal, como la descomposición en valores singulares y la descomposición matricial **QR** (donde **Q** es una matriz ortogonal y **R** es una matriz triangular superior).

2.- La consideración o imposición de restricciones a priori sobre algunos de los parámetros del modelo no resulta sencilla de considerar bajo los métodos de subespacios, que parten de un enfoque “caja negra”.

3.- No se precisa partir de un modelo especificado. La especificación del modelo se puede llevar a cabo por los propios algoritmos de subespacios, que se encargan de estimar el orden de una representación mínima. La identificabilidad se consigue fijando un sistema coordenado para los estados mediante la elección de una matriz invertible arbitraria (cada tipo de algoritmo de subespacios elige esta matriz de una forma determinada). Esto es equivalente a la utilización de parametrizaciones canónicas del enfoque Kalman-máxima-verosimilitud para conseguir un modelo identificable.

6. Conclusiones

El espacio de estados resulta ser un tipo de formulación matemática que presenta una serie de características y herramientas muy apropiadas para su utilización en econometría lineal. En particular, permite realizar una especificación intuitiva de modelos de componentes no observados, ofrece herramientas para realizar una especificación tipo "caja negra", basada en observaciones, y ofrece herramientas para llevar a cabo la estimación de parámetros. A lo largo del artículo se han discutido estas características y se han revisado las principales herramientas a las que aludimos: el filtro de Kalman (enfoque de estimación "universal" Kalman-máxima verosimilitud en modelos lineales) y los métodos de subespacios (que cubren la estimación de parámetros y la especificación basada en observaciones).

Referencias

Aoki, M.; Havenner, A. (1991). "State space modeling of multiple time series", *Econometric Reviews,* 10 (1) , pp. 1-59.

Deistler, M. (1996). "Time Series Econometrics". *CWI Quarterly* 9, 3, pp. 165-179.

Harvey, A.C. (1989). *Forecasting, structural time series models and the Kalman filter*. Cambridge University Press.

Intriligator, Bodkin y Hsiao (1996). *Econometric Models, Techniques and Applications*. 2nd Edition. Prentice Hall.

Izquierdo, S.S.; Hernández, C.; Pajares, J. (2003). "El Filtro de Kalman en Economía: aplicación a los datos de panel y al estudio de cointegración". *Actas del V Congreso de Ingeniería de Organización*, Vol. I, pp. 151-152.

Ljung, L. (1999). *System Identification. Theory for the User*. 2nd edition. Prentice Hall.

Terceiro, J. (1990). *Estimation of Dynamic Econometric Models with Errors in variables*. Berlin: Springer-Verlag.

Van Oberschee, P; De Moor, B. (1996). *Subspace Identification for Linear Systems: Theory – Implementation - Applications*. Dordrecht, The Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Vargas, M. (1999). "Modelización de series temporales estacionarias en el espacio de estados". Documento de trabajo 2/1999/4. Fac. CC.EE. y EE. Albacete, U.C.L.M.