IX Congreso de Ingeniería de Organización
Gijón, 8 y 9 de septiembre de 2005

Métodos de Subespacios. Una aproximación intuitiva

Segismundo S. Izquierdo Millán[1], Javier Pajares Gutiérrez[1], Cesáreo Hernández Iglesias[1]

[1] Dpto. de Organización de Empresas y Comercialización e Investigación de Mercados. E.T.S. de Ingenieros Industriales de Valladolid. Pº del cauce s/n, 47011 Valladolid. segis@eis.uva.es, pajares@eis.uva.es, cesareo@eis.uva.es

Resumen

Este trabajo proporciona una aproximación intuitiva a los fundamentos en que se basa la familia de algoritmos de identificación de sistemas conocida como "métodos de subespacios". En particular, el trabajo está centrado en la identificación de modelos lineales paramétricos de series temporales.

Palabras clave: Subespacios, identificación de sistemas.

1. Introducción

Los métodos de subespacios son algoritmos de identificación de sistemas. Podemos definir la identificación de sistemas como el "arte" de crear modelos matemáticos sencillos y precisos para sistemas complejos a partir de series temporales de observaciones ruidosas (Ljung 1999, Hannan y Deistler 1988).

Existen distintos procedimientos para la obtención de un determinado modelo matemático a partir de observaciones, ligados con una formulación matemática del modelo. Centrándonos en modelos paramétricos lineales de series temporales, contamos, entre las distintas opciones, con la formulación VARMA y con la formulación en el espacio de estados.

La formulación VARMA de un sistema dinámico lineal de m series temporales observadas $\mathbf{y}_t$ es de la forma

$$\boldsymbol{y}_t + \boldsymbol{A}_1 \boldsymbol{y}_{t-1} + \boldsymbol{A}_2 \boldsymbol{y}_{t-2} + \ldots + \boldsymbol{A}_p \boldsymbol{y}_{t-p} = \boldsymbol{e}_t + \boldsymbol{B}_1 \boldsymbol{e}_{t-1} + \ldots + \boldsymbol{B}_q \boldsymbol{e}_{t-q} \qquad (1)$$

donde $\mathbf{e}_t$ es un vector de dimensión m de perturbaciones tipo ruido blanco, con matriz de covarianzas $\mathbf{\Omega}$;

Por su parte, una formulación de un sistema dinámico lineal en el espacio de estados es de la forma

$$\boldsymbol{z}_{t+1} = \boldsymbol{A} \boldsymbol{z}_t + \boldsymbol{K} \boldsymbol{e}_t \qquad \text{Ecuación de transición de estados} \qquad (2)$$

$$\boldsymbol{y}_t = \boldsymbol{C} \boldsymbol{z}_t + \boldsymbol{e}_t \qquad \text{Ecuación de observaciones} \qquad (3)$$

donde $\mathbf{y}_t$ es un vector que agrupa las m series temporales observadas; $\mathbf{z}_t$ es un vector de n variables auxiliares denominadas estados, que condensa toda la información del sistema relevante para su evolución futura y que evoluciona conforme a una ecuación vectorial en diferencias de primer orden; $\mathbf{e}_t$ es vector de dimensión m de perturbaciones tipo ruido blanco, con esperanza cero y matriz de covarianzas **R**; por último, **A**, **K** y **C** son matrices de valores (parámetros) que, junto con **R**, determinan las propiedades estadísticas del sistema.

El problema de identificación estocástica en el espacio de estados es el siguiente: dado un conjunto de observaciones $\mathbf{y}_t$ de un sistema estocástico lineal cuyo modelo matemático es a priori desconocido, encontrar una dimensión mínima n (orden del sistema) para el vector de estados y un conjunto de matrices (parámetros) **A**, **K**, **C** y **R**, tales que las propiedades estadísticas del modelo correspondiente coincidan con las propiedades estadísticas de las series observadas.

Considerando representaciones mínimas (aquellas en las que la dimensión del vector de estados es el orden del sistema), un mismo sistema admite múltiples representaciones equivalentes en el espacio de estados. Si {**A**, **K**, **C**, **R**} es una representación mínima para un sistema, entonces el conjunto $\{\mathbf{A}^+, \mathbf{K}^+, \mathbf{C}^+, \mathbf{R}^+\}$, definido por las relaciones $\mathbf{A}^+ = \mathbf{T}\,\mathbf{A}\,\mathbf{T}^{-1}$, $\mathbf{K}^+ = \mathbf{TK}$, $\mathbf{C}^+ = \mathbf{CT}^{-1}$, y $\mathbf{R}^+ = \mathbf{R}$, donde **T** es una matriz cuadrada invertible cualquiera, es otra representación mínima equivalente para el mismo sistema.

Aunque existe una equivalencia entre las distintas formulaciones matemáticas generales de procesos lineales, algunas de estas formulaciones ofrecen ventajas o características propias para la identificación y la interpretación. En particular, la formulación en el espacio de estados resulta especialmente adecuada para la identificación de sistemas multivariable (Ljung 1999, p. 524; Izquierdo, Hernández y Pajares 2004), dado que el único hiperparámetro a estimar es la dimensión mínima del vector de estados u orden del sistema.

Dentro de los procedimientos de identificación basados en el espacio de estados, uno de los métodos más prácticos y prometedores es la familia de algoritmos conocida como métodos de subespacios. En este artículo pretendemos proporcionar un enfoque intuitivo de las ideas en que se basan estos algoritmos. Un enfoque formal puede encontrarse en Bauer (2005).

2. Cálculo del orden del sistema

El primer valor a estimar para un modelo en el espacio de estados es el orden del sistema, o número mínimo de variables de estado que necesitamos para representar adecuadamente el sistema en estudio.

En general, los métodos de subespacios basan la estimación de este hiperparámetro en una aplicación del teorema de Kronecker (Gantmacher 1960): siendo $\mathbf{y}_t$ un vector columna de series temporales que corresponde a un sistema representable en el espacio de estados con orden n, las matrices

$$\mathbf{H}_i \equiv E(\,[\mathbf{y}'_t, \mathbf{y}'_{t+1},..., \mathbf{y}'_{t+i-1}]'\,[\mathbf{y}'_{t-1}, \mathbf{y}'_{t-2},..., \mathbf{y}'_{t-i}]\,) \qquad (4)$$

son de rango n, para todo i > n.

Para procesos estacionarios, una matriz $\mathbf{H}_i$ es una matriz de Hankel cuyos bloques son matrices de autocovarianzas $\mathbf{\Gamma}_j \equiv E(\mathbf{y}_t\ \mathbf{y}'_{t-j})$:

$$\mathbf{H}_i = \begin{pmatrix} \mathbf{\Gamma}_1 & \mathbf{\Gamma}_2 & \mathbf{\Gamma}_3 & \cdots & \mathbf{\Gamma}_i \\ \mathbf{\Gamma}_2 & \mathbf{\Gamma}_3 & \mathbf{\Gamma}_4 & \cdots & \mathbf{\Gamma}_{i+1} \\ \mathbf{\Gamma}_3 & \mathbf{\Gamma}_4 & \mathbf{\Gamma}_5 & \cdots & \mathbf{\Gamma}_{i+2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \mathbf{\Gamma}_i & \mathbf{\Gamma}_{i+1} & \mathbf{\Gamma}_{i+2} & \cdots & \mathbf{\Gamma}_{2i-1} \end{pmatrix} \tag{5}$$

Además, para procesos estacionarios, las matrices de autocovarianzas son estimables de forma consistente mediante las matrices de autocovarianza muestral.

En definitiva, a partir de las observaciones del sistema podemos estimar de forma consistente matrices $\mathbf{H}_i$ (para distintos valores de i o para un valor de i que asumimos a priori es superior al orden del sistema), y el rango de estas matrices estimadas $\hat{\mathbf{H}}_i$ nos permitiría estimar el orden del sistema.

3. Secuencia auxiliar de estados

Un amplio grupo de algoritmos de subespacios (Van Oberschee y De Moor 1996) basa la identificación del sistema en la combinación de las siguientes dos propiedades:

1 Si se cuenta con el conocimiento de una secuencia de estados, todas las matrices del sistema son estimables por mínimos cuadrados.

2 Es posible estimar el valor de una secuencia de estados a partir de observaciones del sistema.

La primera propiedad es visible en las ecuaciones del espacio de estados:

$z_{t+1} = \boldsymbol{A} z_t + \boldsymbol{K} \boldsymbol{e}_t$ Ecuación de transición de estados (6)

$\boldsymbol{y}_t = \boldsymbol{C} z_t + \boldsymbol{e}_t$ Ecuación de observaciones (7)

La segunda propiedad se basa en la equivalencia que debe existir entre dos tipos de predicciones: por un lado una predicción basada en el teorema de la proyección ortogonal y por otro lado una predicción basada en el valor del estado y en las matrices del sistema:

$$\mathbf{y}^f_t / \mathbf{y}^p_t \approx \mathbf{O}_f \, \hat{z}_{t|t-1} \tag{8}$$

El término $\mathbf{y}^f_t / \mathbf{y}^p_t$ es una predicción lineal (en el periodo t) de f observaciones "futuras" $\mathbf{y}^f_t \equiv [\mathbf{y}'_t, \mathbf{y}'_{t+1},..., \mathbf{y}'_{t+f-1}]'$ utilizando p observaciones "pasadas" $\mathbf{y}^p_t \equiv [\mathbf{y}'_{t-1}, \mathbf{y}'_{t-2},..., \mathbf{y}'_{t-p}]'$ y basada en el teorema de la proyección ortogonal:

$$\mathbf{y}^f_t / \mathbf{y}^p_t = E(\mathbf{y}^f \mathbf{y}^{p\prime}) \, [E(\mathbf{y}^p \mathbf{y}^{p\prime})]^{-1} \, \mathbf{y}^p_t \tag{9}$$

La matriz de proyección de esta predicción lineal se puede estimar a partir de las observaciones del sistema.

El término $\mathbf{O}_f\ \hat{z}_{t|t-1}$ es una predicción de f observaciones futuras $\mathbf{y}^f_t$ basada en el valor estimado del estado en el periodo t (condicionado a la información anterior del sistema) y en una matriz de observabilidad extendida $\mathbf{O}_f$:

$$\mathbf{O}_f \equiv \begin{pmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{CA} \\ \mathbf{CA}^2 \\ \cdots \\ \mathbf{CA}^{f-1} \end{pmatrix} \tag{10}$$

Nótese aquí que si $\mathbf{O}_f$ es una matriz de observabilidad extendida del sistema correspondiente a una representación mínima, el producto $\mathbf{O}_f\ \mathbf{T}$, donde $\mathbf{T}$ es una matriz invertible de rango n cualquiera, es otra matriz de observabilidad del sistema, correspondiente a una representación mínima equivalente.

Agrupando matricialmente los vectores de predicciones $\mathbf{y}^f_t\ /\ \mathbf{y}^p_t$ para valores sucesivos de t obtenemos una matriz de predicciones secuenciales $\hat{\mathbf{Y}}_f$ basada en la proyección ortogonal de observaciones futuras sobre observaciones pasadas. Esta matriz de predicciones $\hat{\mathbf{Y}}_f$ debe corresponder con otra matriz de predicciones secuenciales $\mathbf{O}_f\ \mathbf{Z}$ basada en el producto de una matriz de observabilidad extendida $\mathbf{O}_f$ por una secuencia de estados estimados $\mathbf{Z}$:

$$\hat{\mathbf{Y}}_f \approx \mathbf{O}_f\ \mathbf{Z} \tag{11}$$

La primera matriz, $\hat{\mathbf{Y}}_f$, es calculable a partir de las observaciones, y su descomposición proporciona estimadores de $\mathbf{O}_f$ y de $\mathbf{Z}$. Una vez contamos con una secuencia de estados estimada $\mathbf{Z}$, como hemos visto, los parámetros de una representación en el espacio de estados se pueden estimar por mínimos cuadrados. Alternativamente, podemos obtener estimadores de las matrices **A** y **C** a partir de la matriz de observabilidad $\mathbf{O}_f$ estimada.

La descomposición de $\hat{\mathbf{Y}}_f$ en un producto $\mathbf{O}_f\ \mathbf{Z}$ no es única (Viberg 1995). Los métodos de subespacios utilizan el procedimiento de descomposición en valores singulares $\hat{\mathbf{Y}}_f = \mathbf{U}\ \mathbf{S}\ \mathbf{V}$ para estimar el orden del sistema (mediante el rango de la matriz **S**) y para obtener una descomposición de $\hat{\mathbf{Y}}_f$ en forma de matriz de observabilidad $\mathbf{O}_f$ y matriz de secuencia de estados **Z**.

Frecuentemente la matriz $\hat{\mathbf{Y}}_f$ es "acondicionada" mediante dos matrices de pesos $\mathbf{W}_1$ y $\mathbf{W}_2$ antes de llevar a cabo la descomposición en valores singulares, que se efectúa sobre el producto $\mathbf{W}_1\ \hat{\mathbf{Y}}_f\ \mathbf{W}_2$. Los distintos métodos de subespacios eligen de forma distinta estas matrices de acondicionamiento.

4. Estimación consistente de una matriz de observabilidad

Diversos autores (Ljung 1999) proporcionan una aproximación distinta a los algoritmos de subespacios: un enfoque de variables instrumentales centrado en el cálculo de un estimador consistente de una matriz de observabilidad extendida del sistema. Bajo este punto de vista, los métodos de subespacios estiman en primer lugar, de forma consistente y mediante procedimientos de proyección lineal a partir de las observaciones entrada-salida, una matriz de observabilidad extendida del sistema. Para los sistemas estocásticos que estamos considerando, la proyección ortogonal de las observaciones futuras sobre los datos históricos puede proporcionar ese estimador buscado. Indicaremos las principales características de este enfoque.

Por aplicación recursiva de las ecuaciones del espacio de estados se tiene

$$\mathbf{y}_{t+f-1} = \mathbf{CA}^{f-1}\,\mathbf{z}_t + \mathbf{CA}^{f-2}\,\mathbf{e}_t + \mathbf{CA}^{f-3}\,\mathbf{e}_{t+1} + \ldots + \mathbf{C}\,\mathbf{e}_{t+f-2} + \mathbf{e}_{t+f-1} \qquad (12)$$

de donde

$$\mathbf{y}^f_t = \mathbf{O}_f\,\mathbf{z}_t + \mathbf{H}\,\mathbf{e}^f_t \qquad (13)$$

siendo $\mathbf{e}^f_t \equiv [\mathbf{e}'_t,\ \mathbf{e}'_{t+1},\ \ldots,\ \mathbf{e}'_{t+f-1}]'$ y siendo $\mathbf{H}$ una matriz triangular inferior compuesta por bloques identidad (en la diagonal) y bloques de productos $\mathbf{CA}^j$.

Definiendo las matrices

$$\mathbf{Y}_f \equiv [\mathbf{y}^f_p,\ \mathbf{y}^f_{p+1},\ \ldots,\ \mathbf{y}^f_T] \qquad (14)$$

$$\mathbf{Z} \equiv [\mathbf{z}_p,\ \mathbf{z}_{p+1},\ \ldots,\ \mathbf{z}_T] \qquad (15)$$

$$\mathbf{E}_f \equiv [\mathbf{e}^f_p,\ \mathbf{e}^f_{p+1},\ \ldots,\ \mathbf{e}^f_T] \qquad (16)$$

podemos expresar matricialmente la relación anterior como

$$\mathbf{Y}_f = \mathbf{O}_f\,\mathbf{Z} + \mathbf{H}\,\mathbf{E}_f \qquad (17)$$

Si ahora podemos encontrar una matriz de instrumentos $\boldsymbol{\Psi}$ que elimine asintóticamente el término de las perturbaciones $\mathbf{E}_f$ y tal que el producto $\mathbf{Z}\,\boldsymbol{\Psi}$ sea (asintóticamente) una matriz de rango n, tendremos la igualdad (asintótica)

$$\mathbf{Y}_f\,\boldsymbol{\Psi} = \mathbf{O}_f\,\mathbf{Z}\,\boldsymbol{\Psi} = \mathbf{O}_f\,\mathbf{T} \qquad (18)$$

donde $\mathbf{T}$ es una matriz de rango n, luego el producto $\mathbf{O}_f\,\mathbf{T}$ sería otra matriz de observabilidad del sistema: el producto $\mathbf{Y}_f\,\boldsymbol{\Psi}$ sería un estimador consistente de una matriz de observabilidad del sistema.

Podemos elegir como matriz $\boldsymbol{\Psi}$ de instrumentos las observaciones pasadas

$$\mathbf{Y}_p \equiv [\mathbf{y}^p_p,\ \mathbf{y}^p_{p+1},\ \ldots,\ \mathbf{y}^p_T] \qquad (19)$$

que están incorrelacionadas con las perturbaciones futuras. De este modo, para T observaciones, la matriz $\mathbf{G}$ definida por

$$\mathbf{G} = \frac{1}{T}\,\mathbf{Y}_f\,\mathbf{Y}'_p \qquad (20)$$

puede constituir el estimador ruidoso que buscábamos para obtener una matriz de observabilidad del sistema.
De igual modo a como se vio previamente, la estimación de una matriz de observabilidad se puede depurar mediante una descomposición en valores singulares de la matriz $\mathbf{G}$, y se puede trabajar con la matriz $\mathbf{W}_1\mathbf{G}\,\mathbf{W}_2$ para aportar flexibilidad al algoritmo. La descomposición en valores singulares

$$\mathbf{W}_1\mathbf{G}\,\mathbf{W}_2 = \mathbf{U\,S\,V'} \approx \mathbf{U}_1\,\mathbf{S}_1\,\mathbf{V}_1' \qquad (21)$$

Donde $\mathbf{U}_1$, $\mathbf{S}_1$, $\mathbf{V}_1$ se obtienen truncando las matrices $\mathbf{U}$, $\mathbf{S}$, $\mathbf{V}$ conforme al orden estimado del sistema, proporcionaría, mediante la fórmula $\mathbf{O}_f = \mathbf{W}_1^{-1}\,\mathbf{U}_1\,\mathbf{T}^{-1}$, un estimador de una matriz de observabilidad del sistema, para cualquier matriz $\mathbf{T}^{-1}$ que se elija libremente.

Obsérvese que la proyección lineal

$$\hat{\mathbf{Y}}_f \equiv \mathbf{Y}_f\,\mathbf{Y'}_p\,(\mathbf{Y}_p\,\mathbf{Y'}_p)^{-1}\,\mathbf{Y}_p \qquad (22)$$

con la que trabajaríamos en el enfoque del apartado 3 es en particular una matriz de la forma $\mathbf{W}_1\mathbf{G}\,\mathbf{W}_2$, tomando $\mathbf{W}_1 = \mathbf{I}$ y $\mathbf{W}_2 = \mathrm{T}\,(\mathbf{Y}_p\,\mathbf{Y'}_p)^{\dagger}\,\mathbf{Y}_p$. Esto implica que, desde el punto de vista de su aplicación práctica, este algoritmo de variables instrumentales centrado en la estimación consistente de una matriz de observabilidad del sistema se trata en definitiva del mismo algoritmo anterior del apartado 3.

Referencias

Bauer, D. (2005). Asymptotic Properties of Subspace Estimators. *Automatica*, Vol. 41, Nº 3, pp. 359-376

Gantmacher, R.R. (1960). *The Theory of Matrices, Volume 2*. New York: Chelsea Publishing Company.

Hannan, E. y Deistler, M. (1988). *The Statistical Theory of Linear Systems*. Wiley, New York.

Izquierdo, S.S.; Hernández, C.; Pajares, J. (2004). El Espacio de Estados en Econometría. *Actas del VIII Congreso de Ingeniería de Organización*, pp. 67-68.

Ljung, L. (1999). *System Identification. Theory for the User*. 2nd edition. Prentice Hall.

Van Oberschee, P. y De Moor, B. (1996). *Subspace Identification for Linear Systems: Theory – Implementation - Applications*. Dordrecht, The Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Viberg, M. (1995). Subspace Methods for the Identification of Linear Time Invariant Systems. *Automatica*, Vol. 31, Nº 12, pp. 1835-1851.