Mathematica™ como herramienta docente en Economía*

Luis Rodrigo Izquierdo Millán[1], José Manuel Galán Ordax[1], José Ignacio Santos Martín[1], Segismundo Samuel Izquierdo Millán[2], Ricardo del Olmo Martínez[1]

[1] Área de Organización de Empresas. Escuela Politécnica Superior. Universidad de Burgos. Edificio "La Milanera" C/ Villadiego s/n. Burgos 09001, Burgos. lrizquierdo@ubu.es, jmgalan@ubu.es, jisantos@ubu.es, rdelolmo@ubu.es

[2] Dpto. de Organización de Empresas y Comercialización e Investigación de Mercados. E.T.S. de Ingenieros Industriales de Valladolid. Pº del cauce s/n. Valladolid 47011, Valladolid. segis@eis.uva.es

Resumen

Este trabajo recoge la experiencia del uso de la aplicación informática Mathematica™ como herramienta docente en la asignatura de Economía que se imparte en diferentes titulaciones de la Escuela Politécnica Superior de Burgos. La utilización de Mathematica™ en las exposiciones teóricas y prácticas de Economía permite mostrar al alumno de forma clara e inequívoca la distinción fundamental que existe entre la esencia conceptual de un problema (i.e. los principios básicos que deben aplicarse, su planteamiento, su formalización y los datos necesarios para su resolución) y su dimensión algorítmica. Además, Mathematica™ ayuda a optimizar el uso del tiempo en las clases magistrales mediante la resolución inmediata de ecuaciones y la creación instantánea de gráficos de alta calidad. Este artículo presenta cinco ilustraciones del uso de Mathematica™ en la resolución de problemas de Economía, utilizando varias funciones de implementación propia. El uso de funciones de implementación propia de alto nivel permite resolver problemas conceptualmente similares –pero que usan datos diferentes– de forma casi instantánea. De esta forma, el profesor puede flexibilizar el contenido de sus clases en función de los intereses y capacidades de sus alumnos. El artículo concluye con una breve valoración de nuestra experiencia en el curso académico 2006/2007.

Palabras clave: Mathematica, Economía, Estrategias de Enseñanza, Didáctica.

1. Introducción

Este trabajo recoge la experiencia del uso de la aplicación informática Mathematica™ como herramienta docente en la asignatura de Economía que se imparte en diferentes titulaciones de la Escuela Politécnica Superior de Burgos. El objetivo de esta asignatura es que el alumno adquiera una serie de principios y conceptos microeconómicos básicos que le permitan analizar y comprender fenómenos económicos reales – tales como el comportamiento de los consumidores y las empresas, el papel de los mercados como instituciones de asignación de recursos escasos, o las consecuencias de diferentes intervenciones del Estado en el ámbito económico.

Esta innovación docente responde a nuestro interés por mejorar la calidad y la eficacia de nuestra práctica como profesores, que ya hemos venido concretando en trabajos previos (Santos *et al*., 2006; Santos *et al*., 2005). Nos gustaría seguir enfatizando la importancia de la investigación en el aula, un espacio privilegiado que permite a los docentes explorar nuevas estrategias de enseñanza y contrastar experiencias con el resto de la comunidad de Ingeniería en Organización.

* Este trabajo se deriva de la participación de sus autores en un proyecto de investigación financiado por el Ministerio de Educación y Ciencia con referencia DPI2004-06590, titulado "Integración empresarial y gestión de la cadena de suministro basada en sistemas multiagente".

2. Mathematica

Mathematica es una aplicación informática completamente integrada que permite hacer todo tipo de operaciones matemáticas y de representaciones gráficas. Las operaciones en Mathematica pueden efectuarse numéricamente o haciendo uso del cálculo simbólico (Belsley, 1999). Mathematica viene acompañado de un conjunto de paquetes con funciones no sólo matemáticas, sino también financieras, físicas, de análisis estadístico, de ingeniería y de teoría de la computación, por poner algunos ejemplos. Su capacidad de cálculo numérico y simbólico se integra en un sistema de cuadernos donde podemos combinar de forma interactiva y compacta las fórmulas, los datos de entrada, los resultados y distintos tipos de gráficos.

Las características de Mathematica permiten su aplicación en campos científicos e industriales muy distintos, desde la propia área de conocimiento de Matemáticas, pasando por la Física, la Química, la Ingeniería, la Informática, las Ciencias Sociales y, en particular, también la Economía. En esta última, Mathematica puede ser utilizada no sólo con una finalidad investigadora (ver p. ej. Gálvez & Iglesias, 2006, e Izquierdo *et al*, 2007), sino también docente (p. ej. González Pareja *et al*., 1996; Calderón Montero *et al*., 1997; Cruz-Báez *et al*., 2006), como queremos poner de manifiesto con la experiencia recogida en esta comunicación. La creciente publicación de libros dedicados exclusivamente a la resolución de problemas de índole económica usando Mathematica es prueba del firme interés por esta materia (p. ej. Cliff & Philip, 1997; Stinespring, 2002; Kendrick *et al*., 2005; Cortés López *et al*., 2006).

3. Mathematica en la enseñanza de Economía

Resulta habitual comprobar cómo en nuestras escuelas y facultades los alumnos encuentran en las matemáticas uno de las principales obstáculos para estudiar la asignatura de Economía (Cruz-Báez *et al*., 2006). Esta dificultad es mayor si la asignatura se imparte en los primeros cursos de una titulación, pues generalmente la formación matemática del alumno es más débil.

Con frecuencia los estudiantes sí llegan a comprender de forma intuitiva los conceptos básicos, pero a menudo carecen de las habilidades matemáticas necesarias para formalizar y resolver con agilidad los problemas relacionados. En estos casos Mathematica es particularmente útil, puesto que nos permite mostrar al alumno de forma clara e inequívoca la distinción fundamental que existe entre la esencia conceptual de un problema (i.e. los principios básicos que deben aplicarse, su planteamiento, su formalización y los datos necesarios para su resolución) y su dimensión algorítmica. Además, mediante la programación de funciones propias (que no son más que agrupaciones de operaciones que se ejecutan regularmente de forma conjunta), esta distinción entre la esencia conceptual y el aspecto algorítmico de un problema puede llevarse a cabo a diferentes niveles de abstracción.

En Economía es muy importante comprender las relaciones y dependencias entre las variables de los modelos económicos; estas relaciones sirven de apoyo formal para poder entender, analizar y desarrollar explicaciones e interpretaciones de diferentes fenómenos económicos reales. También aquí Mathematica ofrece una valiosa ayuda, permitiendo –por ejemplo– llevar a cabo un análisis exhaustivo de cualquier modelo económico mediante la exploración sistemática de su espacio de parámetros.

La incorporación de Mathematica en nuestras clases facilita significativamente nuestra labor como docentes. Puede ser muy útil en la resolución completa de problemas en clase –incluyendo aspectos gráficos–, cuya explicación en pizarra suele llevar bastante tiempo. También nos permite centrar el tiempo de clase en el planteamiento y resolución conceptual de los problemas, dejando su dimensión algorítmica propuesta como trabajo complementario, y proporcionando además la resolución precisa y completa de los problemas para que el alumno pueda mejorar también sus conocimientos matemáticos de carácter más algorítmico.

4. Ilustraciones del uso de Mathematica en la resolución de problemas de Economía

En esta sección presentamos 5 ejemplos que ilustran la metodología que seguimos: una separación clara entre la parte conceptual de la resolución de un problema y la parte que es puramente algorítmica. Para ello, hemos implementado una serie de funciones a un nivel de abstracción muy elevado (p. ej. *Isocuantas*, *ProdCosteCosteObj*, y *UtilidadRentaPrecios*) que pueden usarse para llevar a cabo la parte algorítmica de los problemas que se plantean. De este modo, la parte conceptual se reduce a identificar qué función es la más adecuada para resolver el problema específico que se está abordando.

Por limitaciones de espacio, nos es imposible mostrar aquí la distinción entre los aspectos conceptuales y la parte algorítmica de cada ejemplo a niveles de abstracción más bajos. Esta distinción puede apreciarse estudiando el código fuente de las funciones de alto nivel que usamos en cada uno de nuestros ejemplos. Para ello, el lector interesado puede obtener el código fuente solicitándonoslo mediante correo electrónico (licencia "GNU General Public License": http://www.gnu.org/copyleft/gpl.html).

Cada uno de los 5 ejemplos que aquí presentamos consta de cuatro apartados: *Enunciado del problema*, *Funciones utilizadas*, *Código*, y *Salida*. Las funciones que se incluyen en la sección *Funciones utilizadas* son de implementación propia. La sección *Código* recoge las líneas de código escrito en Mathematica que son suficientes para resolver el problema que se plantea. La sección *Salida* muestra el resultado de ejecutar las líneas de código de la sección *Código*.

4.1. Ejemplo 1: Representación de isocuantas

4.1.1 Enunciado del problema

Represente las isocuantas de la función de producción Q = $(K \cdot L)^{0.5}$.

4.1.2 Funciones utilizadas

```
Isocuantas[Q_, rK_, rL_, r_]
```

Q es la función de producción (p. ej.: Q[K_, L_]:= (K·L)^0.5); *rK* es el rango para la primera variable de la función *Q* (p. ej.: {0, 50}); *rL* es el rango para la segunda variable de la función *Q* (p. ej.: {10, 20}); *r* es el rango de la función *Q* que se desea representar (p. ej.: {0, 20}).

4.1.3 Código

```
Prod[K_, L_] := (K L)^0.5;
Isocuantas[Prod, {0, 10}, {0, 10}, {0, 10}]
```

4.1.4 Salida (Figura 1)

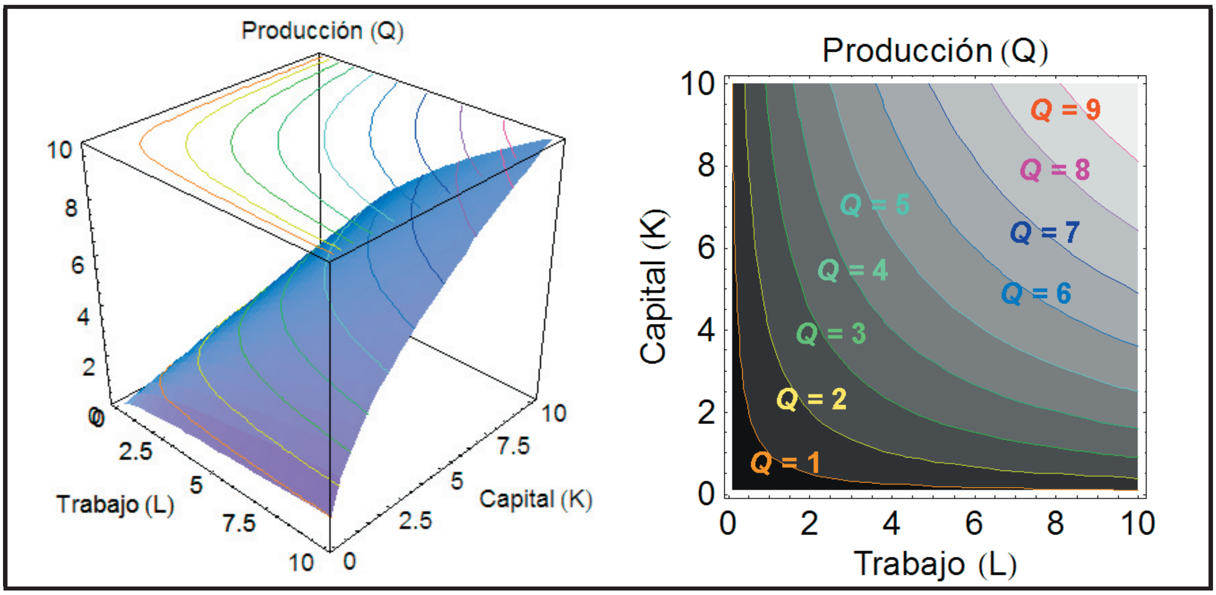


Figura 1. Representación de la función de producción Q = $(K{\cdot}L)^{0.5}$ y de sus isocuantas.

4.2. Ejemplo 2: Maximización de la producción dado un coste máximo permitido

4.2.1 Enunciado del problema

Sea la función de producción Q = $K{\cdot}L$, donde Q se mide en piezas, K denota el capital y L el trabajo. El precio unitario del capital y del trabajo es $p_K = p_L = 1$ €. ¿Cuál es el número máximo de piezas que pueden fabricarse con 10 €?

4.2.2 Funciones utilizadas

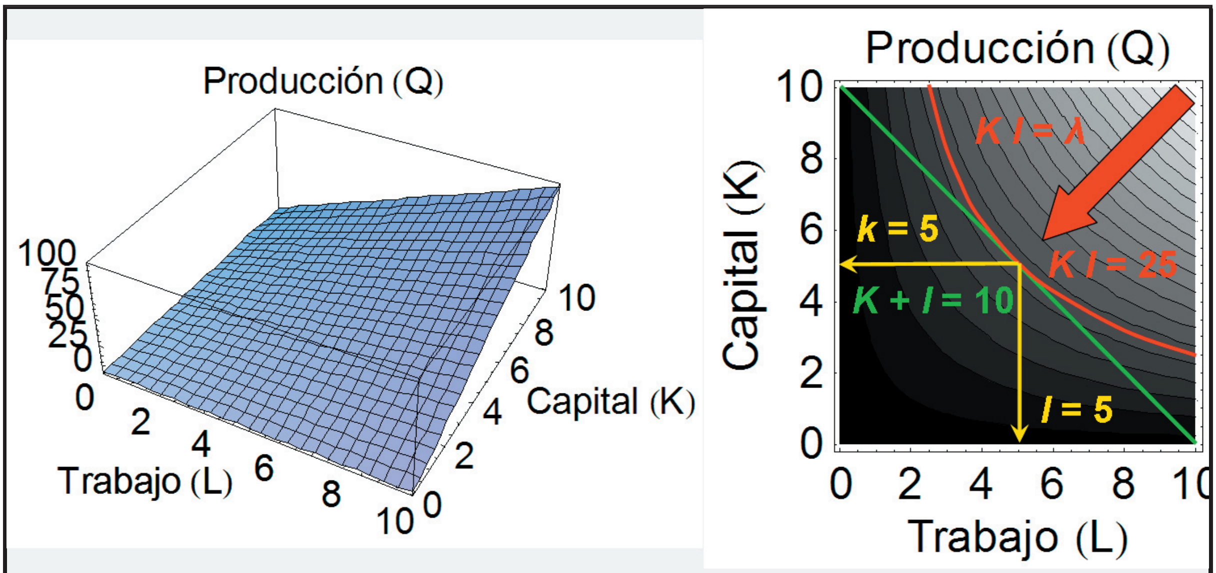
```
ProdCosteCosteObj[Q_, c_, cMax_, rK_, rL_]
```

Q es la función de producción (p. ej.: Q[K_, L_]:= K·L); *c* es la función de costes (p. ej.: c[K_, L_]:= 2·K + 3·L); *cMax* es el coste máximo permitido; *rK* es el rango para la primera variable de la función *Q*; *rL* es el rango para la segunda variable de la función *Q*.

4.2.3 Código

```
Prod[K_, L_] := K L;
Coste[K_, L_] := K + L;
ProdCosteCosteObj[Prod, Coste, 10, {0, 10}, {0, 10}]
```

4.2.4 Salida (Figura 2)



La máxima producción que se puede alcanzar con un coste C = 10 es: 25.
Y se alcanza utilizando: {K–>5., L–>5.}

Figura 2. Representación de la función de producción Q = $K{\cdot}L$ y de sus isocuantas. En el gráfico de la derecha se ilustra la solución del problema de maximización de la producción dado un coste máximo igual a 10 €.

4.3. Ejemplo 3: Maximización de la utilidad dada una renta disponible y unos precios

4.3.1 Enunciado del problema

Sea un mundo con dos bienes x, y, y una persona con un nivel de renta R = 672 € y la siguiente función de utilidad: U = $50x - 0.5x^2 + 100y - y^2$. El precio unitario del bien x es $p_x = 4$ € y el precio unitario del bien y es $p_y = 14$ €. Calcule la cantidad de cada bien que debería comprar dicha persona para maximizar su utilidad.

4.3.2 Funciones utilizadas

```
UtilidadRentaPrecios[U_, R_, px_, py_, r1_, r2_]
```

U es la función de utilidad (p. ej.: U[x_, y_]:= x·y); *R* es la renta disponible; *px* es el precio de la primera variable de la función *U*; *py* es el precio de la segunda variable de *U*; *r1* es el rango para la primera variable de *U*; *r2* es el rango para la segunda variable de *U*.

4.3.3 Código

```
Utilidad[x_, y_] := 50 x - 0.5 x^2 + 100 y - y^2;
UtilidadRentaPrecios[Utilidad, 672, 4, 14, {0, 50}, {0, 50}]
```

4.3.4 Salida (Figura 3)

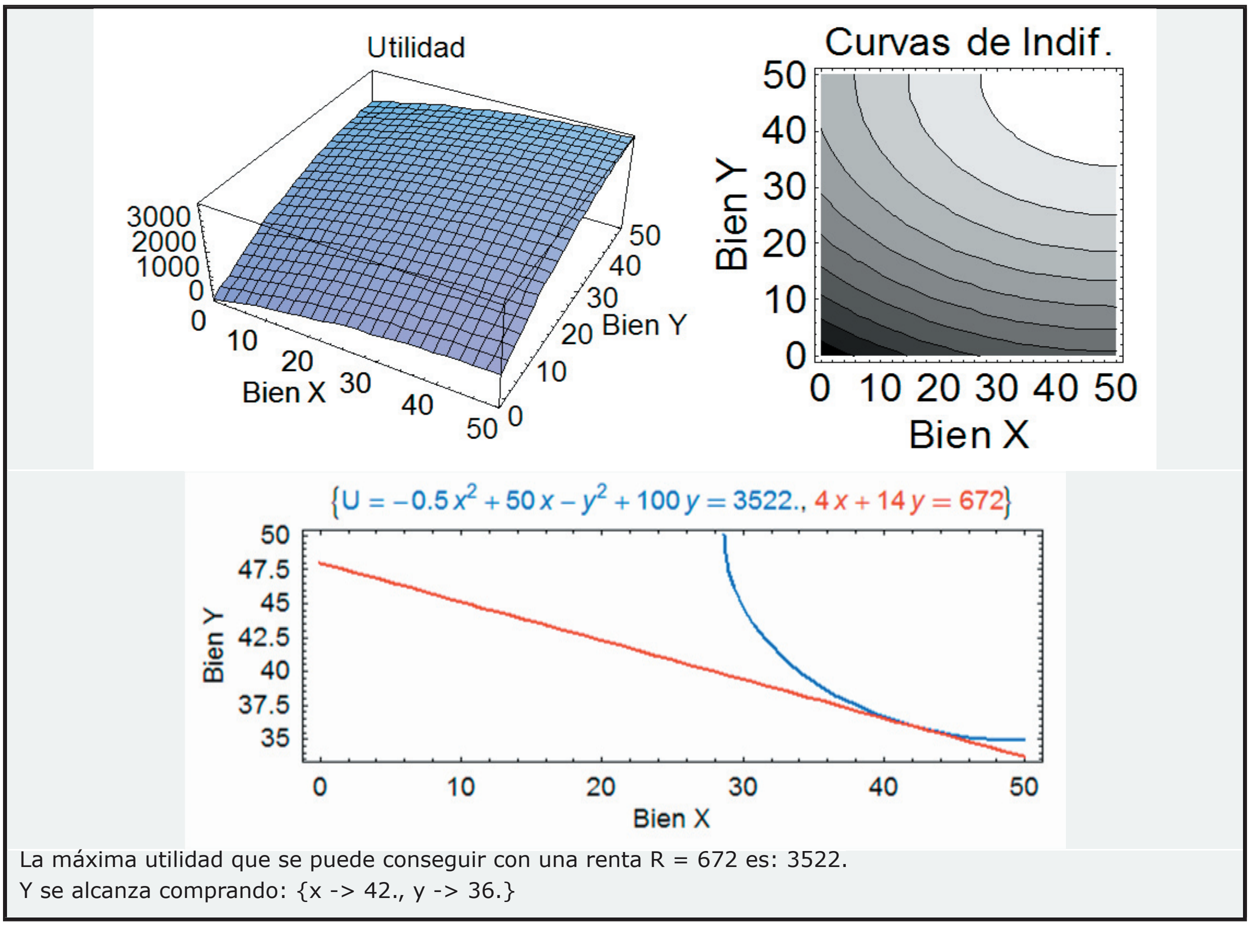


Figura 3. Representación de la función de utilidad $U = 50x - 0.5x^2 + 100y - y^2$, y de sus curvas de indiferencia (gráficos en la parte superior). El gráfico inferior ilustra la solución del problema de maximización de la utilidad dados unos precios unitaros (p_x = 4€; p_y = 14€) y una renta disponible igual a 672€.

4.4. Ejemplo 4: Implantación de un subsidio para incrementar el volumen de ventas

4.4.1 Enunciado del problema

Sea la función de demanda de petróleo $Q_D = 4500 - 250p$, y la función de oferta $Q_S = 200p$, donde Q se mide en miles de barriles y p en euros por barril. El gobierno quisiera alcanzar un punto de equilibrio superior al actual en un 10% tanto en precio como en cantidad. Si el gobierno decide utilizar una política del subsidio, ¿cuál deberá ser la magnitud del subsidio por barril? ¿Qué coste tendrá esta intervención para el gobierno?

4.4.2 Funciones utilizadas

Subsidio[pD_, pO_, qObj_, r_]

pD es la función de demanda, donde el precio viene expresado como función de la cantidad demandada (p. ej.: pD[q_]:= 100 – q); *pO* es la función de oferta, donde el precio viene expresado como función de la cantidad ofertada (p. ej.: pD[q_]:= 2q + 60); *qObj* es la producción objetivo que se desea obtener mediante el subsidio; *r* es el rango de las funciones de oferta y demanda que se desea representar (p. ej.: {0, 20}).

4.4.3 Código

```
PrecioDemanda[q_] := (4500 - q)/250;
PrecioOferta[q_] := q/200;
qAntes = (q /. Solve[PrecioDemanda[q] == PrecioOferta[q], q, Reals][[1]]);
Subsidio[PrecioDemanda, PrecioOferta, (1 + 0.1)qAntes, {0, 20}];
```

4.4.4 Salida (Figuras 4 y 5)

Cantidad de equilibrio antes de la intervención: 2000
Precio de equilibrio antes de la intervención: 10
Excedente de los consumidores
antes de la intervención: 8000
Excedente de los productores
antes de la intervención: 10000

Producción objetivo: 2200
Subsidio: 1.8

Precio que pagan los consumidores con el subsidio: 9.2
Precio que reciben los vendedores con el subsidio: 11

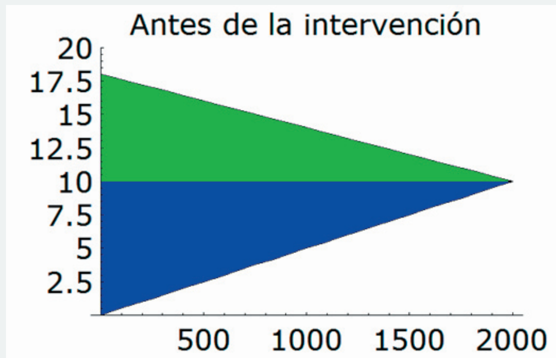
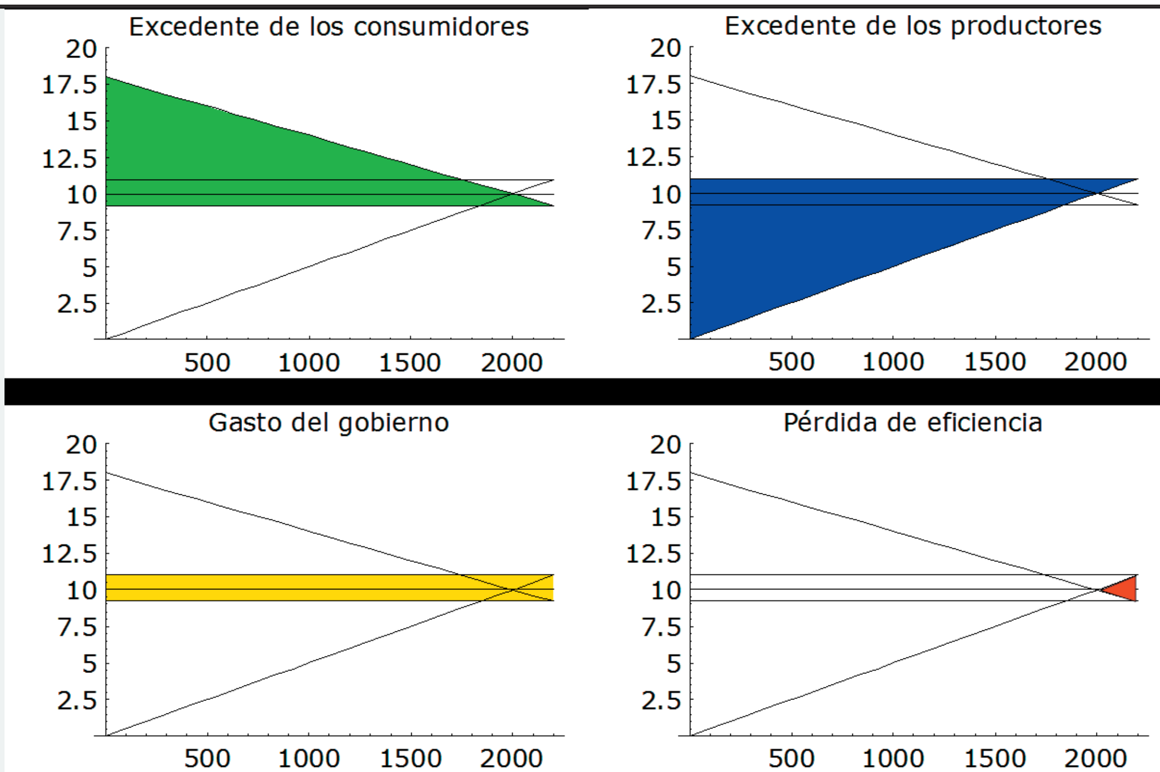


Figura 4. Salida de la función *Subsidio* en lo que se refiere a las condiciones iniciales (precio, cantidad y excedentes de los productores y de los consumidores) y a la magnitud del subsidio para conseguir un determinado volumen de ventas objetivo. El gráfico muestra la situación del mercado antes de la intervención.



Excedente de los consumidores después de la intervención: 9680.
Excedente de los productores después de la intervención: 12100.
Gasto del gobierno: 3960. Pérdida de eficiencia: 180.

Figura 5. Salida de la función *Subsidio* en lo que se refiere a la situación del mercado después de la intervención mediante una subvención. La figura muestra los excedentes de los productores y de los consumidores (parte superior), el gasto del gobierno y la pérdida de eficiencia (parte inferior).

4.5. Ejemplo 5: Cálculo de los costes a largo plazo y de la senda de expansión

4.5.1 Enunciado del problema

Suponga que una empresa con la siguiente función de producción Q = $(K{\cdot}L)^{0.25}$ contrata los factores de producción K y L en un mercado competitivo a los precios unitarios p_L = 2 € y p_K = 4 €. Calcule la senda de expansión de dicha empresa y su función de costes a largo plazo.

4.5.2 Funciones utilizadas

```
SendaDeExpansion[Q_, r_, w_, rL_]
```

Q es la función de producción (p. ej.: Q[K_, L_]:= K·L); *r* es el precio unitario de la primera variable de la función *Q*; *w* es el precio unitario de la segunda variable de la función *Q*; *rL* es el rango para la segunda variable de la función *Q*.

```
CostesLP[Q_, r_, w_, rQ_]
```

Q es la función de producción; *r* es el precio unitario de la primera variable de la función *Q*; *w* es el precio unitario de la segunda variable de la función *Q*; *rQ* es el rango de *Q* que se desea representar.

4.5.3 Código

```
Prod[K_,L_]:=(K L)^(1/4);
SendaDeExpansion[Prod, 4, 2, {1,100}]
CostesLP[Prod, 4, 2, {0,2}]
```

4.5.4 Salida (Figura 6)

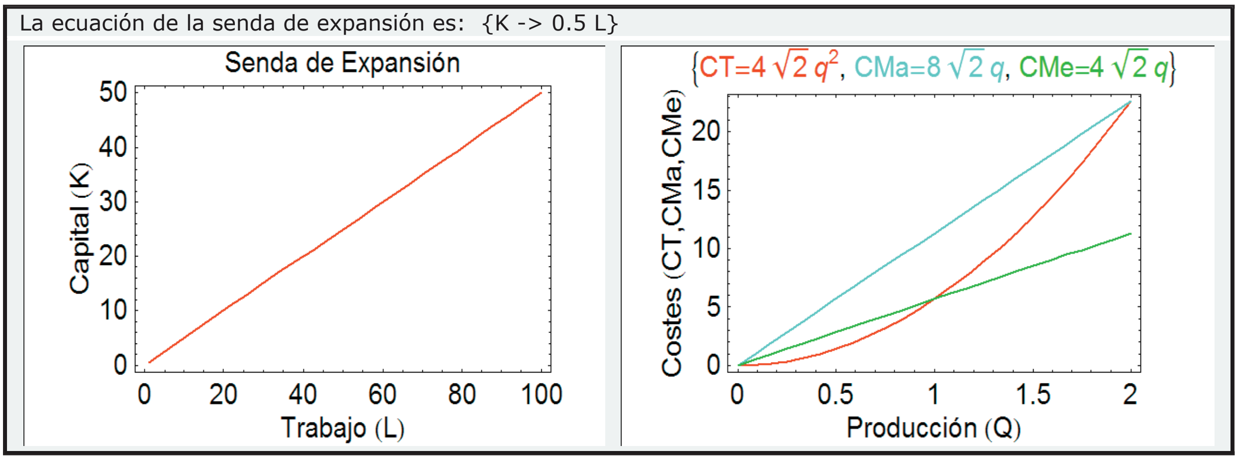


Figura 6. Senda de expansión (izquierda) y costes totales, marginales y medios (derecha) de una empresa con función de producción Q = $(K{\cdot}L)^{0.25}$ que contrata los factores de producción K y L a los precios unitarios p_L = 2 € y p_K = 4 €.

5. Conclusiones

El éxito en el cumplimiento de los objetivos de cualquier asignatura requiere de la implicación del alumno en su proceso de aprendizaje. Sin lugar a dudas, éste es uno de los principales retos al que, como profesores, nos enfrentamos cada año. En Economía, esta labor puede ser significativamente más compleja cuando los conocimientos matemáticos dificultan la comprensión de los contenidos de la asignatura. Mathematica puede ser una herramienta que, aprovechada hábilmente, nos ayude en nuestro empeño docente por motivar y promover la participación del alumno.

Durante el curso 2006/2007 hemos utilizado Mathematica como un recurso didáctico dentro de las exposiciones teóricas y prácticas de la asignatura de Economía. En particular, hemos proporcionado cuadernos de Mathematica con la solución de todos los problemas planteados en clase y de numerosos problemas adicionales. Haciendo uso de los registros informáticos del espacio virtual de nuestras asignaturas hemos podido comprobar que prácticamente la totalidad del alumnado ha descargado estos cuadernos. Varios alumnos nos han comentado que encuentran los aspectos gráficos de los cuadernos especialmente útiles, y también agradecen tener a su disposición la resolución exacta de todos los problemas que se plantean en la asignatura. Sin embargo, pese a que prácticamente todos los alumnos han usado nuestros cuadernos de forma voluntaria, parece que son pocos los que han estudiado nuestro código fuente en profundidad. Lo cierto es que este hecho no nos sorprende, puesto que programar en Mathematica requiere dedicación y esfuerzo y, puesto que la enseñanza de Mathematica no formaba parte de los objetivos de nuestras asignaturas, nos ha sido imposible ofrecer a los alumnos incentivos tangibles para que llevaran a cabo esta tarea de aprendizaje.

Parece claro entonces que los alumnos agradecen tener a su disposición los cuadernos de Mathematica, pero no hacen uso de todo su potencial principalmente por carecer de unos incentivos que hasta ahora nos ha sido imposible proporcionarles. Es nuestra intención ofrecer en un futuro clases prácticas en las que los alumnos puedan adquirir los conceptos básicos de la programación en Mathematica y, de este modo, apreciar de forma más clara la separación entre concepto y algoritmo ya mencionada; además, los alumnos podrían hacer uso de estos conocimientos para resolver problemas en otras asignaturas y en su vida profesional.

También nos hemos dado cuenta de que, a pesar de las diversas fuentes bibliográficas que hemos encontrado sobre Mathematica y Economía, muchas de ellas son introductorias y no abordan todas las posibilidades que a nuestro juicio ofrece esta herramienta. Una de las líneas de trabajo que desarrollamos actualmente pretende cubrir esta laguna con una obra en la que se profundice en la aplicación de Mathematica en la enseñanza de la Economía. Finalmente, a modo de resumen hemos incluido en la Tabla 1 las principales ventajas para alumnos y profesores del uso de Mathematica en la asignatura de Economía.

Tabla 1. Ventajas de Mathematica en el aprendizaje y la enseñanza de la Economía

Alumno (aprendizaje)	Profesor (enseñanza)
✓ Comprender la resolución de los problemas en profundidad (en especial sus aspectos gráficos) ✓ Conocer una herramienta computacional útil en muchos campos de la ingeniería ✓ Distinguir los principios económicos de su formulación analítica ✓ Estructurar los conceptos en diferentes niveles de abstracción	✓ Apoyar gráficamente las explicaciones ✓ Optimizar el uso del tiempo en las clases magistrales (facilitando la resolución completa/parcial de problemas) ✓ Flexibilizar los contenidos (en función de los intereses y capacidades de los alumnos) ✓ Individualizar el proceso de enseñanza (adecuándose a las necesidades particulares de cada alumno)

Agradecimientos

Nos gustaría agradecer la inestimable ayuda proporcionada por Juan José Miralles Canals e Ismael Marín Carrión.

Referencias

Belsley, D.A. (1999). Mathematica as an Environment for Doing Economics and Econometrics. Computational Economics 14(1-2), pp. 69-87.

Calderón Montero, S.; González Pareja, A.; Hidalgo Sánchez, R. (1997). Aportación de algunas técnicas en un entorno de Mathematica en la enseñanza de la Programación Lineal y la Teoría de Grafos. TQ Revista electrónica de cálculo simbólico y aplicaciones, vol. 2. http://csimbolico.rediris.es/math97/artic/art-17.pdf

Cliff J.H.; Philip S.C. (1997). Mathematics and Mathematica for Economists.

Cortés López, J.C.; Jódar Sánchez, L.; Roselló Ferragud, M.D.; Villanueva Micó, R.J. (2006). Problemas y Modelos Matemáticos para la Administración y Dirección de Empresas (IV). Universidad Politécnica de Valencia.

Cruz-Báez, D.I.; González-Rodríguez, J.M.; Moreno-Piquero, J.C. (2006). Mathematica, una herramienta para el análisis dinámico en economía y empresa. XIV Jornadas ASEPUMA - II Encuentro internacional, Badajoz (España), 21 y 22 de Septiembre de 2006. http://www.uv.es/asepuma/XIV/comunica/18nuevo1.pdf

González Pareja, A., Calderón Montero S., Galache Laza, T., Hidalgo Sánchez, R. & Torrico Gonzaléz, A. (1996). Aportación docente en la resolución de un problema de producción en un entorno Mathematica. TQ Revista electrónica de cálculo simbólico y aplicaciones, vol. 1. http://csimbolico.rediris.es/math96/artic/65-74.pdf.

Gálvez, A.; Iglesias, A. (2006). Symbolic analysis of economical models with mathematica. Lecture Notes in Computer Science (including subseries Lecture Notes in Artificial Intelligence and Lecture Notes in Bioinformatics) 3992 LNCS - II: pp. 414-421.

Izquierdo, S.S.; Izquierdo, L.R.; Gotts, N.M. (2007). Reinforcement Learning Dynamics in Social Dilemmas. Enviado a Journal of Artificial Societies and Social Simulation.

Kendrick, D.A.; Mercado, P.R.; Amman, H.M. (2005). Computational Economics. Princeton University Press. Blackwell Publishers.

Santos, J.I.; Galán, J.M.; del Olmo, R. (2005). Nuevas estrategias de enseñanza: experiencia con Weblogs. En D. de la Fuente (Eds), IX Congreso de Ingeniería de Organización, pp. 137-138. Oviedo: ADINGOR.

Santos, J.I.; Posada, M.; Pascual, J.A.; Izquierdo, S.S.; Galán, J.M.; López-Paredes, A. (2006). Un Laboratorio de Economía Experimental en Internet. X Congreso de Ingeniería de Organización. Valencia

Stinespring, J.R. (2002). Mathematica for Microeconomics. Academic Press.