

## **Diseño y aplicación de modelos DEA multiobjetivo**

**Gabriel Villa<sup>1</sup>, David Canca<sup>1</sup>, Ignacio Eguía<sup>1</sup>**

<sup>1</sup> Dpto. de Organización Industrial y Gestión de Empresas. Escuela Superior de Ingenieros. Universidad de Sevilla. Avda. de los Descubrimientos, s/n 41092. Sevilla. gvilla@esi.us.es, dco@esi.us.es, ies@esi.us.es

### **Resumen**

*En este trabajo se exponen dos nuevos modelos DEA para determinar los puntos de operación eficientes a los que una unidad de producción debería tender. El primero está basado en métodos interactivos multiobjetivo, en donde en cada paso del proceso se le pregunta al decisor qué entradas y qué salidas desearía mejorar, en cuáles no le importaría que se produjera un empeoramiento, y qué otras deberían permanecer en los niveles actuales. Los cambios en las prioridades de estas entradas y salidas serán calculadas a partir de la técnica AHP. Por otro lado también se propone una segunda técnica consistente en un modelo lexicográfico en el que el decisor en esta ocasión especifica el nivel de prioridad además de la importancia relativa dada a las mejoras de las entradas y salidas de cada nivel, también usando AHP.*

**Palabras clave:** DEA, optimización multiobjetivo interactivo, optimización multiobjetivo lexicográfico, AHP.

### **1. Introducción**

La técnica Data Envelopment Analysis (DEA) (Cooper et al., 2000) ha sido muy utilizada para evaluar la eficiencia relativa de unidades con capacidad de decisión (Decision Making Units, en adelante DMUs). Una medida de eficiencia puede ser obtenida tras la proyección de cada unidad de producción sobre la frontera eficiente de un determinado conjunto de posibilidades de producción. Frecuentemente, todas las entradas y salidas son consideradas igualmente importantes. Cuando se asume una orientación de entrada para que las unidades sean proyectadas sobre la frontera, se les da mayor prioridad a la mejora de los recursos que a la de los productos, y lo contrario sucede en orientación de salida. Los modelos no orientados también suelen asignar la misma importancia a las mejoras de entradas y salidas.

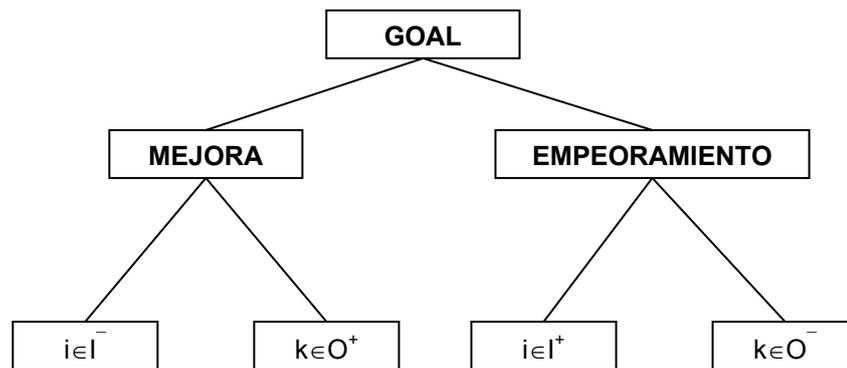
Entre los modelos de asignación de eficiencias, la técnica más usual de tener en cuenta las preferencias del decisor (Decision Maker, en adelante DM), es a través del uso de restricciones en los pesos (ver Wong y Beasley (1990)).

Sin embargo en este trabajo se centrará el análisis en modelos que determinen un objetivo de actuación ("target") para la unidad productiva (ver Zhu (1996), Joro et al (1998), Estellita Lins et al (2004), Korhonen and Syrjänen (2004), Bogetoft and Nielsen (2005)).

### **2. Modelo DEA interactivo**

En este apartado se desarrolla un nuevo modelo DEA interactivo. A partir de un punto de operación de la unidad productiva, el proceso que se presenta se desarrolla de forma iterativa

hasta que el decisor declare que esté satisfecho con los niveles de cada una de las entradas y salidas del problema. En cada iteración se le pide al decisor que identifique los subconjuntos de entradas y salidas que desea que se mejoren ( $I_t^-$  y  $O_t^+$  respectivamente), que permanezcan constantes ( $I_t^0$  y  $O_t^0$  respectivamente) y que no le importe un empeoramiento ( $I_t^+$  y  $O_t^-$  respectivamente). Para implementar las preferencias del decisor (Allen et al., 1997; Dyson y Thanassoulis, 1988) en cada uno de los elementos de estos subconjuntos, se procede a resolver una jerarquía AHP (Saaty, 1980).



**Figura 1.** Jerarquía AHP para la determinación de los pesos en el modelo interactivo.

Con los pesos calculados de esta forma ( $w_i^t, \forall i \in I^- \cup I^+$  y  $v_k^t, \forall k \in O^- \cup O^+$ ), se formaliza un modelo DEA que proporciona el siguiente punto de operación de la DMU.

Sean:

$x_{ij}$  cantidad de entrada  $i$  consumida por la DMU  $j$

$y_{kj}$  cantidad de salida  $k$  producida por la DMU  $j$

$t$  índice de la iteración actual

$x_i^{t-1}$  cantidad de entrada  $i$  consumida en el punto de operación actual (inicialmente  $x_i^0$ )

$y_k^{t-1}$  cantidad de salida  $k$  producida en el punto de operación actual (inicialmente  $y_k^0$ )

$\Delta_{it}^-$  cantidad de mejora máxima de entrada  $i$  desde el punto de operación actual

$\Delta_{it}^+$  cantidad de empeoramiento máximo de entrada  $i$  desde el punto de operación actual

$\delta_{kt}^+$  cantidad de mejora máxima de salida  $k$  desde el punto de operación actual

$\delta_{kt}^-$  cantidad de empeoramiento máximo de salida  $k$  desde el punto de operación actual

$\lambda_j^t$  variables que representan los coeficientes de la combinación lineal de las unidades existentes

$x_i^t$  cantidad de entrada  $i$  consumida por el nuevo punto de operación

$y_k^t$  cantidad de salida  $k$  producida por el nuevo punto de operación

$\alpha_i^t$  reducción proporcional de la entrada  $i$  desde el punto de operación actual

$\beta_k^t$  incremento proporcional de la salida  $k$  desde el punto de operación actual

El modelo DEA a resolver en cada iteración  $t$ , asumiendo Retornos de Escala Variable, es el siguiente:

$$\text{Max} \quad \sum_{i \in I_t^- \cup I_t^+} w_i^t \alpha_i^t + \sum_{k \in O_t^+ \cup O_t^-} v_k^t \beta_k^t$$

s.a:

$$\sum_j \lambda_j^t = 1$$

$$\sum_j \lambda_j^t x_{ij} = x_i^t \quad \forall i \notin I^F$$

$$\sum_j \lambda_j^t y_{kj} = y_k^t \quad \forall k \notin O^F$$

$$x_i^t = (1 - \alpha_i^t) \cdot x_i^{t-1} \quad \forall i \notin I^F$$

$$y_k^t = (1 + \beta_k^t) \cdot y_k^{t-1} \quad \forall k \notin O^F$$

$$x_i^{t-1} - \Delta_{it}^- \leq x_i^t \leq x_i^{t-1} + \Delta_{it}^+ \quad \forall i \notin I^F$$

$$y_k^{t-1} - \delta_{kt}^- \leq y_k^t \leq y_k^{t-1} + \delta_{kt}^+ \quad \forall k \notin O^F$$

$$\sum_j \lambda_j^t x_{ij} \leq x_i^0 \quad \forall i \in I^F$$

$$\sum_j \lambda_j^t y_{kj} \geq y_k^0 \quad \forall k \in O^F$$

$$\lambda_j^t \geq 0 \quad \forall j \quad x_i^t \geq 0 \quad \alpha_i^t \text{ libres } \forall i \notin I^F \quad y_k^t \geq 0 \quad \beta_k^t \text{ libres } \forall k \notin O^F$$

Es preciso hacer notar que se asume de forma implícita en el modelo anterior que  $\Delta_{it}^- = \Delta_{it}^+ = 0$ ,  $\forall i \in I_t^0$ ; que  $\Delta_{it}^+ = 0$ ,  $\forall i \in I_t^-$ ; y que  $\Delta_{it}^- = 0$ ,  $\forall i \in I_t^+$ . De forma análoga se ha supuesto que  $\delta_{kt}^- = \delta_{kt}^+ = 0$ ,  $\forall k \in O_t^0$ ; que  $\delta_{kt}^+ = 0$ ,  $\forall k \in O_t^-$ ; y que  $\delta_{kt}^- = 0$ ,  $\forall k \in O_t^+$ . Puede observarse que para las entradas y salidas no discretionales ( $I^F$ ;  $O^F$ ), el modelo sólo impone que la proyección resultante no sea peor que los valores iniciales.

Puede demostrarse que el modelo expuesto siempre tiene solución admisible, ya que el punto de operación actual es admisible con seguridad. Esta solución, donde el valor de la función

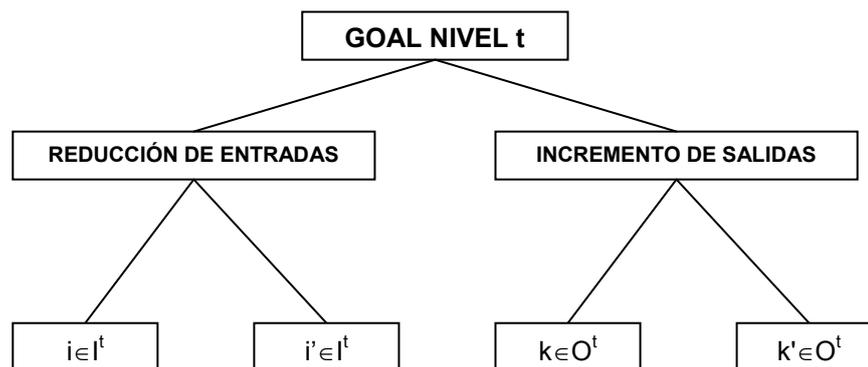
objetivo es nulo, podría ser incluso óptima, en cuyo caso el decisor tiene dos posibilidades: decidir que el punto de operación actual es satisfactorio, o bien continuar con el proceso definiendo nuevos subconjuntos de entradas y salidas  $I_t^0; I_t^-; I_t^+; O_t^0; O_t^-; y O_t^+$ .

También puede observarse que en una cierta iteración del método el decisor podría escoger  $I_t^+ = O_t^- = \emptyset$ , es decir, que sólo sean considerados los puntos de operación que dominen débilmente al actual.

Finalmente, es preciso hacer notar que si algunos o todos los puntos de operación visitados son almacenados (y no sólo los más recientes al punto de operación actual), en cualquier iteración el decisor podría analizar los progresos realizados desde algún punto histórico de especial relevancia, o incluso desde el inicial.

### 3. Modelo DEA lexicográfico

En este apartado se presenta un modelo DEA lexicográfico original. Al contrario que en el apartado anterior, en esta ocasión, el decisor debe proporcionar las preferencias a priori. La primera decisión a tomar será el número de niveles de prioridad ( $L$ ) y el subconjunto de entradas y salidas a mejorar contenidos en dicho nivel ( $I^t$  y  $O^t$  respectivamente).



**Figura 2.** Jerarquía AHP para la determinación de los pesos en el modelo lexicográfico.

Por tanto, para cada nivel, se resuelve una jerarquía AHP para obtener los pesos asignados a cada entrada y salida ( $w_i^t, \forall i \in I^t$  y  $v_k^t, \forall k \in O^t$ ).

Con esta información se resuelve un modelo DEA por cada nivel establecido que asegurará un punto de operación eficiente de la siguiente forma:

Sean:

$\lambda_j^t$  coeficientes de la combinación lineal de las unidades existentes en el nivel  $t$

$x_i^t$  cantidad de entrada  $i$  consumida por la solución obtenida en el nivel  $t$

$x_i^t$  cantidad de salida  $k$  producida por la solución obtenida en el nivel  $t$

$x_i^0 = x_{ij}$  cantidad de entrada  $i$  consumida inicialmente por la DMU objeto de proyección

$y_k^0 = y_{kj}$  cantidad de salida  $k$  producida inicialmente por la DMU objeto de proyección

$\gamma^t$  mejora obtenida en la dirección dada por los pesos en el nivel  $t$

El modelo DEA propuesto para cada nivel  $t$ , asumiendo de nuevo tecnología VRS, es el siguiente:

$$\text{Max } \gamma^t$$

s.a:

$$\sum_j \lambda_j^t = 1$$

$$\sum_j \lambda_j^t x_{ij} \leq (1 - \gamma^t w_i^t) \cdot x_i^0 \quad \forall i \in I^t$$

$$\sum_j \lambda_j^t x_{ij} \leq \left[ 1 - (\gamma^s)^* w_i^s \right] \cdot x_i^0 \quad \forall 1 \leq s < t \quad \forall i \in I^s$$

$$\sum_j \lambda_j^t x_{ij} \leq x_i^0 \quad \forall i \in \left( \bigcup_{s=t+1}^L I^s \right) \cup I^F$$

$$\sum_j \lambda_j^t y_{kj} \geq (1 + \gamma^t v_k^t) \cdot y_k^0 \quad \forall k \in O^t$$

$$\sum_j \lambda_j^t y_{kj} \geq \left[ 1 + (\gamma^s)^* v_k^s \right] \cdot y_k^0 \quad \forall 1 \leq s < t \quad \forall k \in O^s$$

$$\sum_j \lambda_j^t y_{kj} \geq y_k^0 \quad \forall k \in \left( \bigcup_{s=t+1}^L O^s \right) \cup O^F$$

$$\lambda_j^t \geq 0 \quad \forall j \quad \gamma^t \geq 0$$

Puede observarse que la función objetivo representa el máximo incremento a lo largo de la dirección dada por el vector de pesos, en este nivel de prioridad. Las restricciones sobre las proyecciones de los recursos y productos obtenidos en este nivel garantizan:

- que las proyecciones en niveles anteriores son mantenidas en el actual.
- que para las entradas y salidas que no han sido consideradas en niveles superiores, así como para aquellas pertenecientes a los conjuntos  $I^F$  y  $O^F$ , se impone la condición de que los valores iniciales no pueden ser empeorados.

A su vez, se puede comprobar que los modelos de todos los niveles siempre tienen soluciones admisibles ya que la solución inicial es admisible en el primer nivel y el óptimo del nivel previo es siempre admisible en el siguiente modelo.

#### 4. Aplicación al sector bancario

Se realizará un estudio de diferentes sucursales de una firma bancaria (Silva Portela et al (2003)) para cada una de las metodologías propuestas, analizando sus resultados. Se consideran 24 sucursales con dos entradas (costes de personal, SC y otros costes de operación, OOC) y tres salidas (valor de cuentas corrientes, VCA; valor de créditos concedidos, VC; e ingresos debidos a intereses, IR). Todas las entradas y salidas son discretionales, con lo que los conjuntos  $I^F = O^F = \emptyset$ . Se ilustran los modelos multiobjetivo con la proyección VRS de una de las DMUs presentes en el problema, concretamente DMU B3, cuyos recursos y producción son SC=16.819, OOC=24.471, VCA=4892.269, VC=10238.760 e IR=52.234.

##### 4.1. Proyección multiobjetivo interactiva

Asumiremos que el decisor primero proyecta DMU B3 usando un modelo BCC-I convencional (Banker et al. 1984). El punto resultante (cuyas entradas y salidas son SC=12,688; OOC=18,461; VCA=4892,629; VC=10238,760 e IR=52,234) será considerado el punto inicial. En la primera iteración interactiva, el decisor forma los siguientes conjuntos que  $I_t = \{SC\}$ ,  $I_t^+ = \{OOC\}$ ,  $O_t^+ = \{VCA, IR\}$ ,  $O_t = \{VC\}$   $I_t^0 = O_t^0 = \emptyset$ . Además establece que los valores de los cambios producidos en las entradas y salidas de cualquiera de las iteraciones no deberá excederse en valor absoluto de 2 para SC, 4 para OOC, 1000 para VCA, 3000 para VC y 10 para IR (con la notación usada para el modelo:  $\Delta_{SC,t} = 2$ ;  $\Delta_{OOC,t}^+ = 4$ ;  $\delta_{VCA,t}^+ = 1000$ ;  $\delta_{IR,t}^+ = 10$ ;  $\delta_{VC,t} = 3000$ ).

Las entradas y salidas de la proyección obtenida por el modelo multiobjetivo interactivo, con las matrices de comparaciones de la figura 3, son las siguientes: SC=11,147; OOC=21,287; VCA=5386,483; VC=10238,760 e IR=62,010.

	Mejora	Empeor.
Mejora	1	2
Empeor.	½	1

	SC	VCA	IR
SC	1	2	4
VCA	½	1	2
IR	¼	½	1

	OOC	VC
OOC	1	2
VC	½	1

$w_{SC}$	$w_{OOC}$	$w_{VCA}$	$w_{VC}$	$w_{IR}$
.381	.222	.191	.111	.095

Figura 3. Matrices de comparación y pesos resultantes para la primera iteración del modelo interactivo.

La siguiente iteración utiliza como punto de operación inicial el conseguido en el anterior paso. Supondremos que en esta ocasión, el decisor conforma los siguientes conjuntos:  $I_t^- = \{OOC\}$ ,  $I_t^+ = \{SC\}$ ,  $O_t^+ = \{VCA\}$ ,  $O_t^- = \{IR\}$ ,  $I_t^0 = \emptyset$  y  $O_t^0 = \{VC\}$ . En la figura 4 se tienen las matrices de comparación por pares usadas y los pesos resultantes. El nuevo punto proyección en esta segunda iteración es:  $SC=13.147$ ,  $OOC=21.287$ ,  $VCA=5767.954$ ,  $VC=10238.760$  and  $IR=62.010$ .

	Mejora	Empeor.
Mejora	1	2
Empeor.	1/2	1

	OOC	VCA
OOC	1	3/4
VCA	4/3	1

	SC	IR
SC	1	.6
IR	1.66	1

$w_{SC}$	$w_{OOC}$	$w_{VCA}$	$w_{VC}$	$w_{IR}$
.125	.286	.381	0.0	.208

**Figura 4.** Matrices de comparación y pesos resultantes para la segunda iteración del modelo interactivo.

Suponiendo que el decisor opina que los valores obtenidos por el modelo para las dimensiones  $SC$  y  $VC$  son satisfactorios, en la tercera iteración propone los siguientes conjuntos:  $I_t^- = \{OOC\}$ ,  $I_t^+ = \emptyset$ ,  $O_t^+ = \{IR\}$ ,  $O_t^- = \{VCA\}$ ,  $I_t^0 = \{SC\}$  y  $O_t^0 = \{VC\}$ . Esto lleva a una proyección que pertenece a la frontera eficiente y cuyos valores son  $SC=13.147$ ,  $OOC=21.214$ ,  $VCA=5767.954$ ,  $VC=10238.760$  and  $IR=68.119$ , usando las matrices de comparación y pesos resultantes de la figura 5.

	Mejora	Empeor.
Mejora	1	3
Empeor.	1/3	1

	OOC	IR
OOC	1	1/2
IR	2	1

		VCA
	VCA	1

$w_{SC}$	$w_{OOC}$	$w_{VCA}$	$w_{VC}$	$w_{IR}$
0.0	.25	.25	0.0	.5

**Figura 5.** Matrices de comparación y pesos resultantes para la tercera iteración del modelo interactivo.

## 4.2. Proyección multiobjetivo lexicográfica

En esta ocasión se supone que el decisor desea de nuevo proyectar DMU B3 pero que considera un nivel de prioridad único con la matriz de comparación y vectores resultantes mostrados en la figura 6. Los inputs y outputs generados en el modelo lexicográfico son SC=12,598, OOC=21,396, VCA=5595,143, VC=10973,83 e IR=64,808.

Nivel  $t=1$

	Inputs	Outputs
Inputs	1	3/2
Outputs	2/3	1

	VCA	VC	IR
VCA	1	2	4
VC	1/2	1	2
IR	1/4	1/2	1

	SC	OOO
SC	1	2
OOO	1/2	1

$w_{SC}$	$w_{OOO}$	$w_{VCA}$	$w_{VC}$	$w_{IR}$
0.4	0.2	.229	.114	.057

**Figura 6.** Matrices de comparación y pesos resultantes para la primera iteración del modelo lexicográfico.

Si a continuación el decisor decide establecer dos niveles, con  $I^1=\{SC\}$  and  $O^1=\{VCA;VC\}$  en el primer nivel y  $I^2=\{OOO\}$  and  $O^2=\{IR\}$  en el segundo, con las matrices dadas en la figura 7, se obtendrían los siguientes valores SC=10,182, OOO=23,250, VCA=5260,4, VC=12536,83 e IR=61,428.

Nivel  $t=1$

	Inputs	Outputs
Inputs	1	1.5
Outputs	0.67	1

	VCA	VC
VCA	1	2.5
VC	0.4	1

$w_{SC}$	$w_{OOO}$	$w_{VCA}$	$w_{VC}$	$w_{IR}$
0.6	---	.11	0.285	---

Nivel  $t=2$

	Inputs	Outputs
Inputs	1	4
Outputs	.25	1

$w_{SC}$	$w_{OOO}$	$w_{VCA}$	$w_{VC}$	$w_{IR}$
---	.2	---	---	.8

**Figura 7.** Matrices de comparación y pesos resultantes para la segunda iteración del modelo lexicográfico.

## 5. Resumen y conclusiones

En este artículo se han propuesto dos técnicas para obtener puntos de operación eficientes bajo una perspectiva multiobjetivo. En el primero, en cada iteración el decisor proyecta el actual punto de operación, mejorando algunas entradas y salidas seleccionadas a priori, manteniendo otras constantes y permitiendo un eventual empeoramiento de las últimas, todo ello de manera controlada. Los pesos relativos con los que las entradas y salidas del problema pueden mejorar o empeorar se calculan a través de la técnica multiobjetivo AHP.

Por otro lado, también con la técnica AHP se determinan los pesos relativos de las entradas y salidas del segundo método multiobjetivo. Sin embargo, en esta ocasión el decisor establece un número de niveles de prioridad y asigna las entradas y salidas que desea mejorar o permite empeorar a uno de esos niveles de preferencia. Por tanto, para cada nivel de prioridad es necesario resolver una jerarquía AHP para, una vez calculados los pesos asociados a cada entrada y salida, introducirlos en el modelo DEA propuesto para maximizar las mejoras de esas entradas y salidas. La naturaleza lexicográfica de este último método garantiza que los targets calculados para las entradas y salidas de cada nivel de prioridad sean mantenidas en lo sucesivo en niveles de menor prioridad.

Ambos métodos han sido resueltos en una ilustración encontrada en la bibliografía, mostrando de esta forma la versatilidad de los modelos expuestos y su utilidad a la hora de encontrar puntos de operación hacia los que tender con las preferencias fijadas por los analistas.

## Referencias

Allen, R.; Athanassopoulos, A.; Dyson, R.G.; Thanassoulis, E. (1997). "Weights restrictions and value judgements in Data Envelopment Analysis: Evolution, development and future directions". *Annals of Operations Research*, 73:13-34.

Banker, R.D.; Charnes, A.; Cooper, W.W. (1984). "Some Models for Estimating Technical and Scale Inefficiencies in Data Envelopment Analysis". *Management Science*, 30:1078-1092.

Bogetoft, P.; Nielsen, K. (2005). "Internet Based Benchmarking". *Group Decision and Negotiation*, 14:195-215.

Cooper, W.W.; Seiford L.M.; Tone, K. (2000). *Data Envelopment Analysis. A Comprehensive Text with Models, Applications, References and DEA-Solver Software*. Kluwer Academic Publishers.

Dyson, R.G.; Thanassoulis, E. (1988). "Reducing weight flexibility in data envelopment analysis". *Journal of the Operational Research Society*, 39(6):563-576.

Estellita Lins, MP; Angulo-Meza, L.; Moreira da Silva, AC. (2004). "A multi-objective approach to determine alternative targets in data envelopment analysis". *Journal of the Operational Research Society*, 55:1090-101.

Joro, T.; Korhonen, P.; Wallenius, J. (1998). "Structural comparison of data envelopment analysis and multiple objective linear programming". *Management Science*, 44(7):962-970.

- Korhonen, P.; Syrjänen, M. (2004). "Resource Allocation Based on Efficiency Analysis". *Management Science*, 50(8):1134-1144.
- Lozano, S.; Villa, G. (2007). "Multiobjective target setting in data envelopment analysis using AHP". *Computers and Operations Research*, doi: 10.1016/j.cor.2007.10.015
- Saaty, T. (1980). *The Analytic Hierarchy Process*, McGraw Hill, New York.
- Silva Portela, M.C.A.; Castro Borges, P.; Thanassoulis, E. (2003). "Findind Closest Targets in Non-Oriented DEA Models: The Case of Convex and Non-Convex Technologies". *Journal of Productivity Analysis*, 19:251-269.
- Wong, Y.H.B.; Beasley, J.E. (1990). "Restricting weight flexibility in data envelopment analysis". *Journal of the Operational Research Society*, 41:829-835.
- Zhu, J. (1996). "Data Envelopment Analysis with Preference Structure". *Journal of the Operational Research Society*, 47:136-150.