

## **Planificación de las cargas de expedición desde la plataforma logística de una empresa de supermercados hasta sus tiendas<sup>32</sup>**

**Eva Vallada, Rubén Ruiz<sup>33</sup>**

Grupo de Sistemas de Optimización Aplicada, Instituto Tecnológico de Informática, Universidad Politécnica de Valencia, Camino de Vera s/n, 46021 Valencia, España. ,

### **Resumen**

*En este trabajo se presenta un modelo de programación entera mixta para un problema de planificación de las cargas de expedición desde la plataforma logística de una empresa hasta sus tiendas. El modelo tiene como objetivo minimizar la desviación que se produce en el envío de cajas realizado diariamente. Al tratarse de un problema real, el modelo cuenta con gran número de variables y restricciones. También incluye una serie de parámetros, de los que se consideran distintos valores generando una batería de escenarios. Para su resolución se han utilizado tres solvers comerciales: Lingo, Cplex y Gurobi, pudiendo comparar su comportamiento.*

**Palabras clave:** logística, expediciones, MIP.

### **1. Introducción**

La empresa Consum Cooperativa consta de 560 supermercados ubicados en la Comunidad Valenciana, Región de Murcia, Cataluña y Castilla La Mancha. Desde una de sus plataformas logísticas, sita cerca de la ciudad de Valencia, se debe suministrar cada día a las tiendas situadas en las citadas comunidades autónomas. Todo esto se traduce en aproximadamente unos 300 viajes cada día desde la plataforma logística a los supermercados o centros de destino, lo que significa más de 7.000 viajes al mes.

El suministro a las tiendas se lleva a cabo en base a un sistema de pedido automático. Cada tienda tiene concretado un día y una hora de transmisión en la cual envía a la plataforma la última información generada, es decir, las ventas que se han producido desde la última transmisión hasta el momento. A partir de ésta información se genera el pedido para reponer todos los productos que se han vendido. Una vez el pedido llega a la central, empieza a gestionarse y prepararse para expedirse lo antes posible. Para ello se cuenta con una plantilla que trabaja a jornada intensiva de lunes a sábado para poder servir a las tiendas el día siguiente a la transmisión con todo lo que requieren.

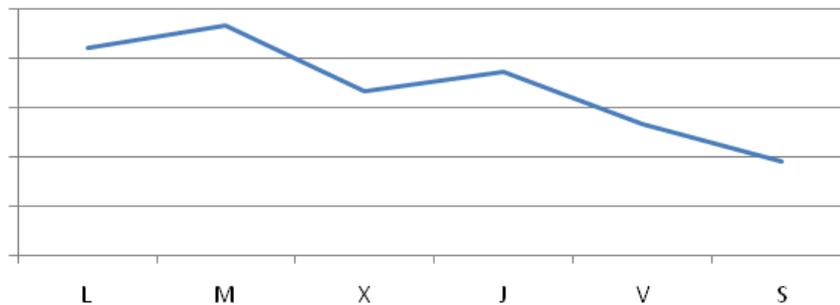
El problema que se presenta es que en la realidad muchas de las tiendas transmiten todos los días, y especialmente los jueves y los sábados se reciben transmisiones del 80% de las tiendas. Esto se debe a que el comportamiento diario de la demanda en las tiendas no es siempre el mismo, ya que los consumidores tienden a realizar sus compras semanales los fines

---

<sup>32</sup> Este trabajo se deriva de la participación de sus autores en un Proyecto Singular Estratégico financiado por el Ministerio de Ciencia e Innovación con referencia PSE-370000-2008-8, titulado “Potenciación de la competitividad del tejido empresarial español a través de la logística como factor estratégico en un entorno global” (<http://www.pse-global.org/>).

<sup>33</sup> Este trabajo se ha realizado conjuntamente con Estefanía Navalón como co-autora, del Departamento de Estadística e Investigación Operativa Aplicadas y Calidad de la Universidad Politécnica de Valencia. [esnapo@ade.upv.es](mailto:esnapo@ade.upv.es)

de semana. Esto supone un gran esfuerzo en la plataforma para poder servir todos los pedidos a tiempo, debido a que la carga de trabajo fluctúa fuertemente de unos días para otros. Esto se traduce en problemas importantes de organización y de costes, ya que hay días en los que existen muchas transmisiones desde las tiendas, provocando sobrecargas en el trabajo con necesidad de horas extra para poder absorberlo. Por otro lado, hay otros días con poca carga de trabajo. En la Figura 1 podemos observar la evolución de la carga de trabajo diaria que se produce en la plataforma, donde se observa claramente los picos de trabajo que se producen determinados días. El eje Y corresponde al número de cajas enviadas al día desde la plataforma. Por motivos de confidencialidad se han eliminado los valores. Actualmente la empresa resuelve esta problemática mediante cálculos manuales y hojas de cálculo.



**Figura 1.** Evolución de la carga de trabaja diaria a lo largo de la semana en un periodo de dos meses

El objetivo de esta investigación es el de proponer una mejora en la curva de trabajo de la plataforma logística. Se busca actuar sobre los envíos a las tiendas de manera que se suavice la carga de trabajo de unos días a otros. La metodología se basa en el uso extensivo de modelos matemáticos y motores de programación matemática comerciales. El reto consiste en las dimensiones de este problema real, que requiere de decenas de miles de variables y de cientos de miles de restricciones.

El trabajo está organizado de la siguiente manera: en la Sección 2 se explica el modelo matemático de programación entera mixta planteado. En la Sección 3 se muestran los experimentos computacionales realizados y los resultados obtenidos. En la Sección 4 se evalúa la solución obtenida. Por último en la Sección 5 encontramos las conclusiones del trabajo.

## 2. Modelo matemático de programación lineal entera mixta

El modelo matemático de programación lineal entera mixta que se plantea tiene como objetivo principal el minimizar la desviación que se produce en el envío de cajas realizado diariamente con respecto al número ideal promedio de cajas que se debería enviar cada día a cada tienda. Con ello conseguimos suavizar la curva de los envíos diarios. El citado número medio de cajas se obtiene a partir de los datos históricos proporcionados por la empresa, es decir, de los envíos realizados a tiendas a lo largo del tiempo. No obstante, como es común en los problemas reales, un único objetivo no captura la problemática empresarial. A continuación se describen de una manera resumida los objetivos que se pretenden alcanzar:

1. Minimizar la desviación total de los envíos de cada día con respecto a una media diaria obtenida a partir de datos históricos de la empresa (función objetivo del modelo). Aquí se persigue suavizar la carga de la plataforma logística, buscando que cada día se procesen y envíen el mismo número de cajas a tiendas.

2. Obtener el número de cajas a enviar cada día a cada una de las tiendas o centros. El objetivo es que cada día se envíe el mismo número de cajas en total a todas las tiendas, es decir, suavizar la carga de trabajo. El número de cajas a enviar cada día a cada tienda serán por tanto una de las variables del modelo.
3. Patrón de servicio a utilizar, entendiendo como patrón de servicio los días de la semana que se realizan envíos a cada una de las tiendas. Es decir, no se pueden realizar envíos días sueltos, sino que cada tienda tiene que acogerse a un patrón, que dictará qué días se realizan envíos según dicho patrón utilizado para esa tienda. Por tanto, para modelizar este aspecto del problema se utilizarán variables binarias que tomarán valor 1 si la tienda utiliza un patrón determinado y 0 en caso contrario. Cada tienda debe utilizar un único patrón de envío de entre los existentes. Los patrones vendrán definidos por la empresa según sus necesidades.
4. A partir de los datos históricos proporcionados por la empresa, obtenemos el número de cajas a enviar a cada tienda cada semana. Evidentemente, este número varía fuertemente de una tienda a otra en función de su tamaño, localización, etc. Con todo ello, cada día que se realice envío a cada tienda, según el patrón que ésta utilice, se enviarán un porcentaje de esa cantidad de cajas a enviar por semana. Dicha cantidad de cajas a enviar cada día, podrá fluctuar en un porcentaje que vendrá definido por la empresa según sus necesidades. Es decir, si una tienda debe recibir como mínimo 1.000 cajas a la semana y utiliza un patrón de servicio de 4 días, cada uno de esos días definido en el patrón tendrá un porcentaje asignado. Si esos porcentajes son 20%, 20%, 30% y 30% querrá decir que deberían enviarse 200, 200, 300 y 300 cajas, respectivamente. Estas cantidades, podrán modificarse de acuerdo a un porcentaje al que llamamos tolerancia. De esta manera, para este caso concreto, el primer día se podrán enviar 200 cajas  $\pm$  porcentaje de las cajas a enviar por semana.
5. Suavizar el número de tiendas o centros visitados cada día. Para evitar situaciones en las que se visitan por ejemplo 100 tiendas un día y 400 al día siguiente, se modeliza también un suavizado para el número de tiendas a visitar cada día. Dicho número de tiendas deberá ser en la medida de lo posible el mismo cada día, es decir, el modelo cuenta con una constante que será el número medio de tiendas a visitar cada día y también con unas tolerancias en porcentaje. De esta manera, el número de tiendas a visitar podrá fluctuar entre la media menos dicho porcentaje y la media más dicho porcentaje.

Una vez establecidos los objetivos a alcanzar, describimos de una manera resumida la función objetivo y los grupos de restricciones a considerar en el modelo.

La función objetivo se formula como una función matemática lineal de las variables de decisión y representa el objetivo del problema. En nuestro caso pretendemos minimizar los excesos y defectos sobre el valor teórico medio de cajas diarias que se envían desde la plataforma a la totalidad de las tiendas. Es decir, minimizar las diferencias con respecto a la media teórica calculada que será un parámetro del modelo.

En cuanto a las restricciones, a continuación se describen los grupos de restricciones a considerar para cumplir todos los requerimientos del problema a resolver:

1. La cantidad total de cajas a enviar cada día a las tiendas debe ser igual a la media teórica de cajas a enviar por día más un exceso y menos un defecto.
2. Todas las tiendas tienen que utilizar algún patrón de servicio, pero no más de uno. Es decir, exactamente uno.

3. La suma de lo que se envía cada día a cada tienda tiene que ser igual al total que se envía cada día desde la plataforma.
4. Hay que enviar un número mínimo de cajas a cada centro a lo largo de la semana. Este mínimo se calcula como la media de cajas semanal para cada tienda a partir de los datos históricos.
5. El número de servicios (días de envío) del patrón asignado a cada tienda, será el número de días que reciba cajas la tienda durante la semana.
6. Cada tienda necesita un número mínimo de servicios a la semana. A su vez, el número de servicios también estará limitado superiormente por el máximo número de días que se pueden realizar envíos, en nuestro caso 6 días que corresponden de lunes a sábado.
7. Cada día se envía a cada tienda la cantidad fija que determina el patrón (la media de cajas semanales por centro en la proporción que determine el porcentaje diario por patrón), más el exceso y menos el defecto permitidos.
8. Los excesos y defectos de cada día para todas las tiendas y patrón utilizados estarán acotados por un valor de tolerancia, calculado por la multiplicación de la cantidad fija que determina el patrón y un porcentaje de tolerancia.
9. La suma del número de cajas a enviar por día, patrón y tienda debe ser igual al número de cajas a enviar por tienda y día, dado que solo se usa un patrón por centro.
10. El número de tiendas que se sirven cada día será la suma de aquellas que por el patrón elegido sean servidas ese mismo día. Es decir, la suma de las tiendas que sean servidas por un patrón que tenga el día activo.
11. El número de tiendas que se sirven cada día será igual a un valor teórico medio calculado a partir de los datos históricos, fluctuando en un porcentaje de tolerancia.

### 3. Experimentos computacionales y resultados

Según la definición anterior del problema, la mejor solución posible para la empresa es aquella en la que la función objetivo toma valor 0. Esto querrá decir que la carga de trabajo se ha suavizado de manera que cada día de la semana se envían exactamente el mismo número de cajas (el número medio de cajas). Como hemos podido ver en la sección anterior, el modelo cuenta con un gran número de datos de entrada, entre los que tenemos constantes y también parámetros. Los parámetros a considerar en el modelo serán los siguientes:

- Número de patrones de servicio: número de patrones de servicio de envío para cada centro. Consideramos los valores 10, 20 y 30 patrones.
- Tolerancia (Tol%): tolerancia para el porcentaje en el que puede fluctuar el número de cajas que se envía cada día a cada centro según el patrón de envío utilizado. Consideramos los valores 2%, 5% y 10%. Nótese como esta tolerancia es baja, de manera que no se permite cualquier tipo de envío, sino fluctuaciones menores en torno a la media.
- ToleranciaTiendas (TolT%): tolerancia para el porcentaje en el que puede fluctuar el número de tiendas que se visitan cada día. Consideramos los valores 5% y 10%.

Con todo ello, contamos con 18 combinaciones posibles de los diferentes parámetros que nos da un total de 18 modelos correspondientes a 18 escenarios distintos para el mismo problema. En la Tabla 1, se resumen las variables y restricciones que componen los modelos generados en función del número de patrones indicando a su vez el número de variables que son enteras. Como se observa, al incrementar el número de patrones de servicio se incrementa el número de variables y restricciones del modelo de forma considerable. Concretamente, en el caso de 30 patrones tenemos casi 90.000 variables y más de 110.000 restricciones en el modelo.

**Tabla 1.** Características de los modelos.

	<b>10 PATRONES</b>	<b>20 PATRONES</b>	<b>30 PATRONES</b>
<b>Variables totales</b>	39.348	69.914	88.859
Variables enteras	2.476	4.809	6.588
<b>Restricciones</b>	49.832	87.476	110.364

Para resolver dichos modelos, se han utilizado tres solvers comerciales diferentes, a los que nos referiremos genéricamente como “solvers”: Lingo 12.0, ILOG-IBM Cplex 12.1 y Gurobi 2.0.2. Se trata a día de hoy de prácticamente las últimas versiones disponibles de estos solvers. De hecho, en el caso de Lingo, se ha usó una versión beta cedida amablemente por Lindo Systems. Todos ellos han sido ejecutados en ordenadores Intel Core 2 Duo a 2.4 GHz y 2 GB de memoria. Destacar que tanto Cplex como Gurobi hacen uso de los dos cores disponibles en los ordenadores empleados.

Los resultados para los modelos con 10, 20 y 30 patrones pueden verse en las Tablas 2, 3 y 4 respectivamente. En la columna Tol% tendremos los valores definidos para la primera de las tolerancias (sobre número de cajas a enviar cada semana), en TolT% tendremos los definidos para las tolerancias de las tiendas visitadas. En la columna Valor de la Función Objetivo tenemos los valores de la función objetivo obtenidos para cada uno de los tres solvers utilizados: Lingo denotado como L, Cplex denotado como C y Gurobi como G. Obviamente este valor es el mismo cuando todos encuentran la solución óptima. En la columna Tiempo tenemos el tiempo en segundos que ha necesitado cada uno de los solvers denotados de la misma manera. Por último la columna Gap nos dice la distancia relativa en % entre la solución encontrada y la solución óptima o la cota inferior que cada solver ha calculado para cada problema, en caso de no haber obtenido la solución óptima.

Al contrario de lo que se podía pensar a priori tras los problemas encontrados en el proceso de modelización, el incremento de variables y restricciones no ha perjudicado la resolución del modelo, sino todo lo contrario. Podemos observar en la Tabla 2 que los modelos con 10 patrones son los más difíciles de resolver para todos los solvers, ya que solo en uno de los seis modelos con 10 patrones, todos han llegado a la solución óptima. Como indica el %GAP, los tres solvers sólo han sido capaces de encontrar solución óptima para el modelo planteado para una tolerancia de las tiendas y una tolerancia de los centros del 5%. No obstante, Cplex y Gurobi también han encontrado solución óptima para el modelo con tolerancia para el número de cajas a enviar del 2% y tolerancia para las tiendas del 5%. Esto es principalmente debido a que los 10 patrones, junto con los porcentajes de tolerancia, hacen el modelo muy restrictivo.

Si nos centramos en los resultados de la Tabla 4, para 30 patrones, podemos observar que ocurre justo lo contrario. Todos los solvers encuentran la solución óptima que además, en este caso, coincide con la mejor solución posible, ya que el valor de la función objetivo es 0. Al contar el modelo con 30 patrones de envío de servicio, pasa a ser menos restrictivo.

En cuanto a los resultados obtenidos con los modelos de 20 patrones (Tabla 3), observamos que el comportamiento está entre los dos casos anteriores. Los solvers son capaces de resolver de manera óptima tres de los seis modelos planteados. En concreto los correspondientes a tolerancia para el número de cajas a enviar de 5% y tolerancia para las tiendas del 10% y el caso en el que la tolerancia para el número de cajas a enviar es del 10% y tolerancia para las tiendas del 5 y 10%. En el caso de Cplex y Gurobi, son también capaces de resolver óptimamente el caso en el que la tolerancia para el número de cajas es del 2% y del 10% para las tiendas.

Por tanto, la conclusión obtenida es que el modelo resulta más “fácil” de resolver cuando trabajamos con un mayor número de patrones y definimos tolerancias menos restrictivas. En estos casos, al contar con más patrones, existe mucha más flexibilidad para encontrar soluciones. Si se reduce el número de patrones y/o se reducen las tolerancias, estamos obligando al solver a evaluar muchas más soluciones, dado que nos acercamos a la frontera entre los problemas de optimización y los problemas de factibilidad (i.e., miles de variables pero solo unas pocas soluciones factibles).

Por último, si comparamos la eficiencia de los tres solvers utilizados, vemos que Lingo necesita mucho más tiempo de ejecución para encontrar soluciones en general bastante peores que los otros dos (observar que el Gap para Lingo es en general bastante mayor). Si nos centramos en Cplex vs Gurobi, se puede observar que en los modelos más fáciles de resolver (30 patrones y algunos de 20), Cplex es mucho más rápido que Gurobi. Sin embargo, para los que resultan más difíciles (10 patrones), Gurobi es capaz de encontrar una solución muy cercana a la cota en menos tiempo.

Aunque resulta difícil concluir qué solver es el más adecuado para el problema que nos ocupa, se podría considerar Cplex como el mejor sistema de optimización a utilizar por sus reducidos tiempos de resolución y porque sus valores de GAP, a pesar de no ser los mejores, no son tan elevados como LINGO. No obstante, como este modelo pretende ser resuelto de forma bianual o trianual, la calidad de las soluciones podría resultar más importante que el corto tiempo de resolución. Nótese que en muchos casos hemos detenido el solver antes de obtener la solución con GAP cero, concretamente cuando se observaba que el tiempo se alargaba excesivamente. En cualquier caso, el GAP obtenido en el caso de Cplex y Gurobi en ningún caso es superior al 0,5% para tiempos de CPU que rara vez han superado la media hora. Sin tener en cuenta los tiempos para Lingo, en el caso de resultados para 10 patrones (Tabla 2) encontramos que en el peor de los casos Gurobi tarda menos de 6 minutos en encontrar una solución que está a un 0,49% de distancia de la cota inferior calculada por el solver. En el caso de 20 patrones (Tabla 3) vemos que en el peor de los casos Cplex tarda poco más de 20 minutos en obtener una solución un 0,5% alejada de su cota inferior y Gurobi tarda 2 horas en obtener la solución óptima para tolerancia de número de cajas del 2% y tolerancia de tiendas del 10%. En el caso de 30 patrones (Tabla 4), en el peor de los casos Gurobi necesita apenas 15 minutos para obtener la solución óptima. Por tanto estaríamos hablando de soluciones quasi-óptimas para el problema que nos ocupa en tiempos relativamente cortos, teniendo en cuenta que al tratarse de un problema de resolución trimestral, el tiempo requerido para obtener la solución no es en absoluto un impedimento.

**Tabla 2.** Resultados para 10 patrones de servicio

Tol%	TolT%	VALOR FUNCION OBJETIVO			TIEMPO (seg.)			GAP (%)		
		L	C	G	L	C	G	L	C	G
2	5	42.632	42.477	42.477	103	13	22	0,44	0	0
	10	36.715	36.684	36.674	174	65	38	0,27	0,09	0,07
5	5	27.885	27.885	27.885	311	130	71	0	0	0
	10	23.681	23.631	23.630	846	129	111	0,97	0,08	0,07
10	5	4.652	4.555	4.552	1.949	206	347	4,8	0,43	0,49
	10	2.861	2.836	2.837	34.590	338	221	5	0,09	0,09

Tabla 3. Resultados para 20 patrones de servicio

Tol%	TolT%	VALOR FUNCION OBJETIVO			TIEMPO (seg.)			GAP (%)		
		L	C	G	L	C	G	L	C	G
2	5	14.661	14.249	14.248	276	122	190	3,24	0,1	0,08
	10	5.683	5.670	5.670	388	735	7.200	0,94	0	0
5	5	1.137	1.127	1.126	465	1.266	623	5	0,5	0,49
	10	0	0	0	615	66	214	0	0	0
10	5	0	0	0	254	30	99	0	0	0
	10	0	0	0	216	33	216	0	0	0

Tabla 4. Resultados para 30 patrones de servicio

Tol%	TolT%	VALOR FUNCION OBJETIVO			TIEMPO (seg.)			GAP (%)		
		L	C	G	L	C	G	L	C	G
2	5	0	0	0	1.521	384	906	0	0	0
	10	0	0	0	733	299	575	0	0	0
5	5	0	0	0	857	375	366	0	0	0
	10	0	0	0	391	79	272	0	0	0
10	5	0	0	0	346	92	276	0	0	0
	10	0	0	0	324	58	257	0	0	0

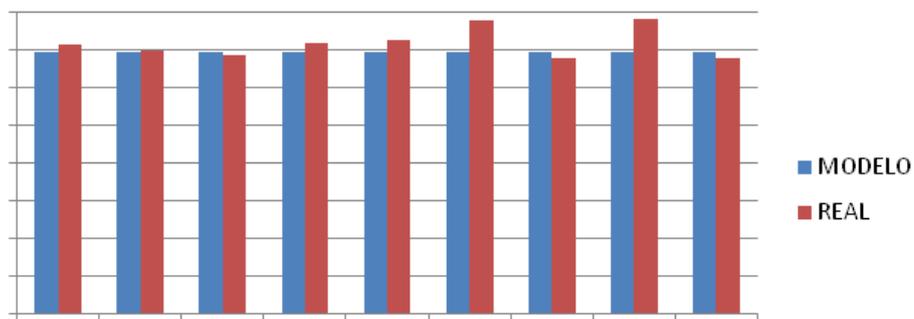
#### 4. Evaluación de las soluciones

Una vez se han obtenido las diferentes soluciones del modelo, resulta interesante evaluar cada una de ellas para saber cuál es la más adecuada para la empresa, es decir, aquella que mejor se ajusta a la realidad de la plataforma y de las tiendas.

Para ello se han comparado las soluciones obtenidas con los datos reales del periodo estudiado. Se han considerado los diferentes resultados obtenidos con los escenarios anteriormente definidos. Por motivos de espacio, solo describiremos brevemente la comparación de la solución obtenida con el modelo de 30 patrones y ambas tolerancias con valores del 10%, para el que se ha obtenido la solución óptima y además la mejor solución posible.

La evaluación de la solución se ha llevado a cabo en dos niveles. En primer lugar, se evalúa el total del periodo estudiado (dos meses) analizando la carga diaria en número de cajas y el volumen de cajas servidas semanalmente a las tiendas desde la plataforma. Y en segundo lugar, se comparan los resultados del modelo para una semana determinada del periodo analizado. En este segundo análisis se estudian detalladamente los servicios que reciben las tiendas, los patrones utilizados, las cajas recibidas, tiendas servidas, etc.

En el presente trabajo, por motivos de espacio y de confidencialidad solo mostramos parte del resultado de la evaluación de primer nivel. En la Figura 2 podemos ver el número de cajas reales enviadas en dicho período y el número de cajas a enviar que hubiera propuesto el modelo. El eje X corresponde a cada una de las semanas consideradas en el periodo de dos meses y el eje Y corresponde al número de cajas enviadas cada una de esas semanas a todas las tiendas (por motivos de confidencialidad se han eliminado los valores de los ejes). Si comparamos los resultados, vemos que la carga de trabajo se suaviza enviando cada día el número de cajas promedio ideal calculado y además se cubren las necesidades de las tiendas en una media del 97% de los casos.



**Figura 2.** Comparativa entre el número de cajas reales enviadas y número de cajas a enviar que propone el modelo.

## 5. Conclusiones

En este trabajo se ha presentado un modelo de programación entera mixta para un problema real de planificación de las cargas de expedición desde la plataforma logística de una empresa de supermercados hasta sus tiendas. Al tratarse de un problema real, el modelo cuenta con una gran cantidad de variables, constantes y restricciones. También incluye una serie de parámetros, de los que se consideran distintos valores generando de esa manera una batería de 18 modelos distintos. Para su resolución se han utilizado tres solvers: Lingo, Cplex y Gurobi, pudiendo también comparar el comportamiento de los mismos bajo las mismas condiciones.

Se ha evaluado la solución propuesta por el modelo matemático obteniendo que en un 97% de los casos es posible cubrir las necesidades de todas las tiendas manteniendo la curva de la carga de los envíos suavizada, es decir, enviando cada día el mismo número de cajas a todas las tiendas, el número medio ideal calculado a partir de los datos históricos.

Resulta interesante comprobar cómo un problema de dimensiones reales y que tiene decenas de miles de variables se puede resolver de forma óptima o quasi-óptima en tiempos que raramente superan los 15 minutos en la mayoría de los casos. Habida cuenta de que se trata de un problema de cadencia bimestral, el tiempo de resolución no es un problema. Con la solución propuesta la empresa dispone de planes de envío de cajas a tiendas que consiguen en muchos casos un alisado óptimo de la carga de trabajo en la plataforma logística. En estos momentos nos encontramos evaluando el impacto de la solución propuesta en la empresa.

## **6. Agradecimientos**

Queremos agradecer la colaboración de la empresa Consum Cooperativa y en especial a Alfredo Cabrera Soriano, responsable de logística, así como a Marta del Carmen Pinazo.