4th International Conference on Industrial Engineering and Industrial Management
XIV Congreso de Ingeniería de Organización
Donostia- San Sebastián , September 8th -10th 2010

La independencia de los resultados del análisis estructural Matrice d'Impacts Croisés Multiplication (MICMAC) respecto del orden en que se colocan las variables para la construcción de la Matriz de Relaciones Directas.

Carlos M. Dema[1], Teresa Barberá[1]

[1] Dpto. de Organización de Empresas. Escuela Técnica Superior de Ingenieros Industriales de Valencia. Universidad Politécnica de Valencia Camino de Vera s/n, 46022 Valencia. cmdema@doe.upv.es, mabarri@upvnet.upv.es.

Resumen

El Análisis Estructural (MICMAC) constituye una interesante herramienta a la hora de reducir de forma objetiva el número de variables consideradas para explicar el comportamiento de un proceso. Por ello, ha sido frecuentemente utilizado en estudios de carácter prospectivo y estratégico. El carácter cualitativo del método, que permite enriquecer los estudios incorporando nuevas variables, no es óbice para profundizar en los fundamentos matemáticos que se sitúan en la base de la metodología En la presente comunicación se demuestra que los valores de las relaciones de orden superior y, como consecuencia directa los vectores motricidad y dependencia, son independientes del orden en el que se colocan las variables en la matriz de relaciones directas.

Palabras clave: Matrice d'Impacts Croisés Multiplication (MICMAC), Análisis Estructural, Análisis por Sistemas, Aproximación Sistémica.

1. Introducción

1.1. Propósito.

La fragilidad teórica del Análisis Estructural y del Juego de Actores fue planteada a finales de los 90's (Lesourne, 1989) sugiriéndose direcciones para la investigación. Esta misma línea se amplió a nivel general y conceptual (Gonod, 1990; 1994,;1996), como en el campo específico en el campo de la prospectiva regional (Gonod, 1994), Por ello desde principios de los 90's se inició una línea de investigación tendente a resolver, o minimizar, los problemas que plantea la metodología.

Uno de los problemas que plantea la metodología "Matrice d'Impacts Croisés Multiplication" (MICMAC) al utilizarse en las etapas previas a los estudios de prospectiva radica en la posible influencia del orden en que se colocan la variables en la matriz de relaciones directas sobre los resultados o sobre el orden de las relaciones en que se alcanza la estabilización de las clasificaciones de las variables.

1.2. Metodología.

Deductiva a partir de las bases del modelo "Matrice d'Impacts Croisés Multiplication" MICMAC. (Godet, 1991; 1993).

1.3. Aportaciones.

Se pueden resumir en dos:

– Las matrices de orden superior son idénticas, elemento a elemento, sea cual sea la permutación que se realice de las variables en la matriz de relaciones directas deshaciendo la permutación en la matriz de relaciones de orden n.
– Los vectores motricidad y dependencia son idénticos para cualquier orden de relación simplemente deshaciendo la permutación de las variables.

1.4. Relevancia de las aportaciones.

Refuerza los fundamentos en los que se basa la metodología y aumenta la significación de los resultados de los trabajos ya realizados y de los que se realicen aplicando esta metodología.

2. Planteamiento del problema.

El problema se plantea en base a un conjunto ordenado $\mathbb{V}$ formado por n variables $V=[v_1, v_2,v_3,v_4,.........v_n]$ / n finito. Salvo que se indique lo contrario todos los sumatorios se extienden hasta n.

Sea A $[a_{ij}]$ la matriz nxn tal que a_{ij} representa para i,j menor o igual n la influencia directa de v_i sobre v_j (pertenecientes al conjunto $\mathbb{V}$) de forma que $a_{ij}=1$ si esta es significativa y $a_{ij}=0$ si no lo es. Los elementos de la diagonal principal son nulos, $a_{ii}=0$, i menor o igual que n, ya que no se consideran las autorealimentaciones de las variables.

Sea Φ [n x n] el conjunto de las matrices de dimensiones n x n.

Sea Φ [1 x n] el conjunto de las matrices de dimensiones 1 x n.

Sea Φ [n x 1] el conjunto de las matrices de dimensiones n x 1.

Sean las aplicaciones:

Select Ω_M definida de Φ [n x n] sobre Φ [n x 1] tal que:

$\Omega_M [a_{ij}]$, M / $Mi = \Sigma j=1\ a_{ij}$, $\forall$ i,j $\leq$ n, es decir, que la componente i-ésima del vector M es el resultado de sumar todos los elementos de la fila i-ésima de la matriz $[a_{ij}]$.

Ω_D definida de Φ [n x n] sobre Φ [1 x n] tal que:

$\Omega_D [a_{ij}]$, D / $Dj = \Sigma_{i=1}\ a_{ij}$, $\forall$ i,j $\leq$ n, es decir, que la componente i-ésima del vector D es es resultado de sumar todos los elementos de la columna j-ésima de la matriz $[a_{ij}]$.

Sea la serie $\{A, A^2, A^3, A^4, A^5,....A^N\}$ formada por las sucesivas potencias de la matriz A, siendo n finito.

Al aplicar Ω_M sobre cada uno de sus elementos se obtendrá la serie: $\{M, M^2, M^3, M^4, M^5,....M^N\}$, de forma que para todo l menor o igual que n, M^l será el resultado de la aplicación sobre A^l. Por ello, la componente k-ésima de M^l será la suma desde j=1 hasta j=n de los elementos de la fila k de la matriz A^l.

De forma análoga, al aplicar Ω_D sobre cada uno de sus elementos se obtendrá la serie $\{D , D^2 ,D^3 , D^4 , D^5,....D^N\}$; de forma que, para todo l menor o igual que n, D^l será el resultado de la aplicación sobre A^l . Por ello, la componente k-ésima de D^l será la suma desde i=1 hasta i=n de los elementos de la columna k de la matriz A^l.

En aras de demostrar que los resultados obtenidos son independientes, del orden en que se sitúan las variables en la matriz de relaciones directas, se considera una permutación genérica.

– Sea δ perteneciente a S_n una cualquiera de las n! posibles permutaciones que se pueden realizar con las n variables del conjunto $\mathbb{V}$, que pasa a ser: $\mathbb{V}_\delta=\{V_{\delta(1)},V_{\delta(2)},V_{\delta(3)},V_{\delta(4)},.....V_{\delta(n)}\}$.

Al formar la matriz A_δ de forma que el elemento $a_{\delta(i),d(j)}$ representa para $\forall\ \delta_{(i)}\ ,\delta_{(j)} \leq n$ la influencia directa de $V_{\delta(i)}$ sobre $V_{\delta(j)}$, pertenecientes al conjunto $\mathbb{V}_\delta$, siendo $a_{\delta(i),\delta(j)}=1$ si esta es significativa y $a_{\delta(i),\delta(j)}=0$ si no lo es. Los elementos de la diagonal principal son nulos, $a_{\delta(i),\delta(i)}=0$ para "$\delta_{(i)},\delta_{(j)} \leq n$, ya que no se consideran las autorealimentaciones de las variables.

- Sea la serie $\{A_d\ , A_d^2, A_d^3, A_d^4, A_d^5,....A_d^n\}$ formada por las sucesivas potencias de la matriz A_δ siendo n finito.

Al aplicar Ω_M sobre cada uno de sus elementos se obtendrá la serie: $\{M_\delta\ , M_\delta^2, M_\delta^3, M_\delta^4, M_\delta^5,....M_\delta^N\}$; de forma que para todo l menor o igual que n, M_d^l será el resultado de la aplicación sobre A_δ^l. Por ello, la componente k-ésima de M_δ^l será la suma desde j=1 hasta j=n de los elementos de la fila k de la matriz A_δ^l.

De forma análoga al aplicar Ω_D sobre cada uno de sus elementos se obtendrá la serie $\{D_\delta\ , D_\delta^2, D_\delta^3, D_\delta^4, D_\delta^5,....D_\delta^n\}$; de forma que para todo l menor o igual que n, D_δ^l será el resultado de la aplicación sobre A_δ^l. Por ello, la componente k-ésima de D^l será la suma desde i=1 hasta i=n de los elementos de la columna k de la matriz A_δ^l.

Se pretende demostrar que para toda permutación δ del conjunto de variables $\mathbb{V}=[v_1, v_2,v_3,v_3,.........v_n]$ / n finito, y para toda potencia ψ finita de la matriz de relaciones directas la componente i, $\forall\ i \leq n$ del vector : M^ψ / $M^\psi_i = \Sigma j=1\ a^\psi_{i,j}$, $\forall\ i,j \leq n$, es igual a la componente $\delta(i)$ del vector: M^ψ_δ /$M^\psi_{\delta(i)}$ =S $_{\delta(j)=1}a^\psi_{\delta(i),\delta(j)}$, " $\delta(i),\delta(j) \leq n$, y que la componente j, $\forall\ j\leq n$ del vector: D^ψ / $D^\psi_j = \Sigma i=1\ a^y_{i,j}$, $\forall\ i,j \leq n$, es igual a la componente $\delta(j)$ del vector : D^ψ_δ / $D^\psi_{\delta(j)}$ =S $_{\delta(i)=1}\ a^\psi_{\delta(i),\delta(j)}$, $\forall\ \delta(i),\delta(j) \leq n$.

Se va a proceder por inducción. En primer término se analiza el caso de y=1, esto es, para la matriz de relaciones directas, y con posterioridad para y=2, y=3 y y=4. A partir de ello se generaliza para una potencia genérica w, ψ=w. En todos los casos se considera una permutación genérica δ del conjunto de variables

$\mathbb{V}=[v_1, v_2,v_3,v_3,.........v_n]$ / n finito , que pasa a ser: $\mathbb{V}_\delta= \{V_{\delta(1)},V_{\delta(2)},V_{\delta(3)},V_{\delta(4)},.....V_{\delta(n)}\}$.

3 Influencia para □=1 . matriz de relaciones directas.

De la comparación de las matrices $[a_{ij}]$ y $[a_{\delta(i),\delta(j)}]$, pertenecientes a Φ [n x n], se pueden obtener las conclusiones siguientes:

3.1 Elementos de la diagonal principal.

Los elementos de la diagonal principal de la matriz $[a_{\delta(i),\delta(j)}]$ son nulos para todo $\delta(i)$ menor o igual que n. Esto es cierto ya que al formar la matriz $[a_{ij}]$ se impuso la condición de que todos los elementos de la diagonal principal fueran nulos: $a_{i,i}=0$ para todo i menor o igual que n.

Al realizar la permutación sobre las variables del conjunto $\mathbb{V}$ (δ es una cualquiera de las n! posibles permutaciones de las n variables), y dado que se realiza la misma permutación sobre las columnas y sobre las filas, el elemento $a_{i,i}$ pasará a estar situado en la posición $a_{\delta(i),\delta(i)}$ pero siempre dentro de la diagonal principal; y dado que el valor de i es genérico y se extiende para todo valor menor o igual a n, se puede afirmar que todos lo elementos de la diagonal principal son nulos.

Dado que a la matriz $[a_{ij}],\forall\ i,j \leq n$ no se le ha impuesto otra condición que la de tener todos los elementos de la diagonal principal nulos, de lo anteriormente expuesto se puede deducir que: Dada una matriz cuadrada nxn tal que para todo i menor o igual que n , y dada δ una cualquiera de la n posibles permutaciones de las filas y de las columnas (se realiza la misma permutación en ambas) y la aplicación definida de $[a_{ij}], \forall\ i,j \leq n$ sobre $[a_{\delta(i),\delta(j)}]$, ambas pertenecientes a Φ $[n \times n]$ tal que al elemento a_{ij} de $[a_{ij}], \forall\ i,j \leq n$ le corresponde el elemento $a_{\delta(i),\delta(j)}$ de $[a_{\delta(i),\delta(j)}], \forall\ \delta(i),\delta(j) \leq n$; se puede afirmar que los elementos de la diagonal principal de serán todos nulos.

Por todo ello, y sea cual sea la permutación δ que se realiza de las variables, la matriz permutada de cualquier matriz de relaciones directas cumple la condición de que los elementos de la diagonal principal son nulos.

3.2. Elementos no pertenecientes a la diagonal principal.

Al realizar la permutación δ sobre las variables del conjunto $\mathbb{V}$, recordemos que δ es una cualquiera de las posibles permutaciones que se pueden realizar con las n variables del conjunto $\mathbb{V}$, y dado que se realiza la misma permutación en las filas y en las columnas el elemento de la matriz $[a_{ij}], \forall i,j \leq n$ es igual al elemento $a_{\delta(i),\delta(j)}$ de $[a_{\delta(i),\delta(j)}]$, $\forall\ \delta(i),\delta(j) \leq n$.

Como lógicamente debe ocurrir, ya que representa la influencia de V_i sobre V_j y a que estas han pasado a ocupar las posiciones $V_{\delta(i)}$ y $V_{\delta(j)}$ en la nueva ordenación de las variables.

3.3 Componentes del vector motricidad.

Se va a demostrar que los elementos que componen el vector motricidad de la matriz de relaciones directas son los mismos que los que componen el vector motricidad de la matriz permutada, y que el cambio en su ordenación corresponde con el impuesto por la permutación δ, siendo δ una cualquiera de las $n!$ posibles permutaciones que se pueden realizar con las n variables del conjunto $\mathbb{V}$.

Sea i para una cualquiera de las n filas de la matriz $[a_{ij}]$, y $\delta(i)$ la fila permutada de la anterior en la matriz $[a_{\delta(i),\delta(j)}]$. Los elementos de la fila i representan la influencia de la variable i sobre todas las demás, pero lo mismo ocurrirá con los elementos de la fila $\delta(i)$ de la matriz $[a_{\delta(i),\delta(j)}]$, puesto que es la posición permutada de la i. Por ello son los mismos elementos en los que se ha cambiado el orden en el mismo sentido que impone la permutación δ, y dado que el orden de los sumando no altera la suma esta también será la misma.

$m_i = \Sigma j{=}1\ a_{ij} = \Sigma_{\delta(j)=1} a_{\delta(i),\delta(j)} = m_{\delta(i)}\ \ \forall\ i,j \leq n,\ \forall\ \delta(i),\delta(j) \leq n.$

3.4. Componentes del vector dependencia.

Se va a demostrar que los elementos que componen el vector motricidad de la matriz de relaciones directas son los mismos que los que componen el vector motricidad de la matriz permutada, y que el cambio en su ordenación corresponde con el impuesto por la permutación δ, siendo δ una cualquiera de las n posibles permutaciones que se pueden realizar con las n variables del conjunto $\mathbb{V}$.

Sea j una cualquiera de las n columnas de la matriz $[a_{ij}]$, y $\delta(j)$ la columna permutada de la anterior en la matriz $[a_{\delta(i),\delta(j)}]$. Los elementos de la columna j representan la influencia sobre la variable j de todas las demás variables pero lo mismo ocurrirá con los elementos de la columna $\delta(j)$ de la matriz $[a_{\delta(i),\delta(j)}]$, puesto que es la posición permutada de la j. Por ello, son los mismos elementos en los que se ha cambiado el orden en el mismo sentido que impone la permutación δ, y dado que el orden de los sumando no altera la suma esta también será la misma.

$d_j = \Sigma i{=}1\ a_{ij} = \Sigma_{\delta(i)=1}\ \ a_{\delta(i),\delta(j)} = d_{\delta(j)}, \forall\ i,j \leq n.$

4 Influencia para ψ=2. Matriz de segundo orden.

Dada la matriz de relaciones directas $[a_{ij}]$, perteneciente al conjunto $\Phi[nxn]$ se calcula su segunda potencia $[a_{ij}]^2$, que será una nueva matriz también perteneciente al conjunto $\Phi[nxn]$, y cuyo elemento genérico a^2_{ij} será: $a^2_{ij}=\sum_{k=1} a_{ik}\, a_{kj}$ Conforme se indicó al principio de este apartado, y aunque no se haga constar, todos los sumatorios se extienden hasta n.

Sean las aplicaciones:

Ω_M definida de $\Phi[nxn]$ sobre $\Phi[nx1]$ tal que:

$\Omega_M[a_{ij}]**M/M_i=\Sigma_{j=1} a_{ij}$, $\forall$ $i,j \leq n$, es decir, que la componente i-ésima del vector M es el resultado de sumar todos los elementos de la fila i-ésima de la matriz $[a_{ij}]$.

Ω_D definida de Φ [nxn] sobre Φ [1xn] tal que:

$\Omega_D[a_{ij}]**D/D_j =\Sigma_{i=1} a_{ij}$, $\forall$ $i,j \leq n$, es decir, que la componente i-ésima del vector D es el resultado de sumar todos los elementos de la columna j-ésima de la matriz $[a_{ij}]$.

Salvo que se indique lo contrario todos los sumatorios se extienden hasta n.

Tomemos una componente p genérica de M^2 perteneciente a Φ [nx1],

$m^2_p=\sum_{j=1} a_{pj}=\sum_{j=1}(\sum_{k=1} a_{pk}\, a_{kj})$, $\forall$ $p \leq n$.

Tomemos una componente q genérica de D^2 perteneciente a $\Phi[1xn]$,

$d^2_q=\sum_{i=1} a_{iq}=\sum_{i=1}(\sum_{k=1} a_{ik}\, a_{kq})$, $\forall$ $q \leq n$.

Tomemos de nuevo una permutación genérica δ de entre las $n!$ que se pueden obtener con las n variables del conjunto $\mathbb{V}$, y tomemos la matriz de relaciones directas $[a_{\delta(i),\delta(j)}]$, $\forall$ $\delta_{(i)}$,$\delta_{(j)} \leq n$, obtenida tras la permutación de las variables y apliquemos las aplicaciones definidas el apartado anterior sobre la matriz $[a_{\delta(i),\delta(j)}]^2$ a cuyos elementos denominamos $a^2_{\delta(i),\delta(j)}$, $\forall$ $\delta_{(i)},\delta_{(j)} \leq n$. Ω_M definida de Φ [n x n] sobre Φ [n x 1] tal que:

$\Omega_M[a_{\delta(i),\delta(j)}]^2***M^2/M^2i=\Sigma j=1\ a^2_{\delta(i),\delta(j)}$, $\forall$ $\delta_{(i)},\delta_{(j)} \leq n$, es decir, que la componente i-ésima del vector M_δ^2 es el resultado de sumar todos los elementos de la fila i-ésima de la matriz $[a_{\delta(i),\delta(j)}]^2$.

Ω_D definida de Φ [nxn] sobre Φ [1xn] tal que:

$\Omega_D\ [a_{\delta(i),\delta(j)}]^2***D^2/D^2j =\Sigma i=1\ a^2_{\delta(i),\delta(j)}$,$\forall$ $\delta_{(i)}$,$\delta_{(j)} \leq n$, es decir, que la componente i-ésima del vector D_δ^2 es el resultado de sumar todos los elementos de la columna j-ésima de la matriz $[a_{\delta(i),\delta(j)}]^2$.

Salvo que se indique lo contrario todos los sumatorios se extienden hasta n.

Tomemos una componente $\delta(p)$ genérica de M_δ^2 perteneciente a Φ[[nx1]:

$m^2_{\delta(p)}=\sum_{\delta(j)=1} a_{\delta(p)\delta(j)}=\sum_{\delta(j)=1}(\sum_{\delta(k)=1} a_{\delta(p),\delta(k)}\, a_{\delta(k),\delta(j)})$, $\forall\delta(p)\leq n$

Tomemos una componente $\delta(q)$ genérica de $D_\delta{}^2$ perteneciente a Φ[1xn]:

$d^2{}_{\delta(q)}=\sum_{\delta(i)=1} a_{\delta(i)\delta(q)}=\sum_{\delta(i)=1}(\sum_{\delta(k)=1} a_{\delta(i),\delta(k)} a_{\delta(k),\delta(q)})$, $\forall$ $\delta(q) \leq n$

Se va a demostrar que las componentes que componen el vector M^2, perteneciente a Φ [nx1] son las mismas que las del vector M_δ^2 pero cambiando su ordenación en el sentido que impone la permutación genérica δ que se ha impuesto a las variables del conjunto $\mathbb{V}$, y que lo mismo se produce con el vector D^2 perteneciente Φ [1xn] a con el vector $D_\delta{}^2$. Para ello, calculamos las diferencias:

$m^2_p - m^2_{\delta(p)}$, $\forall p,\delta(p) \leq n$ y $d^2_q - d^2_{\delta(q)}, \forall q,\delta(q) \leq n$, que de ser correcta la aseveración anterior deberán ser siempre nulas.

4.1 Elementos de la matriz de segundo orden

Previamente es necesario demostrar que la componente a^2_i, $\forall i,j \leq n$ de la matriz $[a_{i,j}]^2$ es igual a la componente $a^2_{\delta(i)\delta(j)}, \forall\ \delta(i),\delta(j) \leq n$, de la matriz $[a_{\delta(i),\delta(j)}]^2$.

Al realizar la permutación δ sobre las variables del conjunto $\mathbb{V}$ (recordemos que es una cualquiera de las posibles permutaciones que se pueden realizar con las n variables del conjunto $\mathbb{V}$) y dado que se realiza la misma permutación en las filas y en las columnas, el elemento de la matriz $[a_{ij}], \forall i,j \leq n$ es igual al elemento $_{\delta(i),\delta(j)}$ de $[a_{\delta(i),\delta(j)}]$, $\forall \delta(i),\delta(j) \leq n$. como lógicamente debe ocurrir, ya que representa la influencia de V_i sobre V_j y a que estas han pasado a ocupar las posiciones $V_{\delta(i)}$ y $V_{\delta(j)}$ en la nueva ordenación de las variables.

Para ello calculemos la diferencia entre a^2_{ij} y $a^2{}_{\delta(i)\delta(j)}, \forall\ i,j,\delta(i),\delta(j) \leq n$, $a^2_{ij} - a^2_{\delta(i)\delta(j)} = \sum_{k=1} a_{ik}\, a_{kj}) - \sum_{\delta(k)=1} a_{\delta(i),\delta(k)}\, a_{\delta(k),\delta(j)}$.

Extender el sumatorio desde k igual a 1 hasta n es lo mismo que hacerlo de $\delta(k)$ igual a 1 hasta n. Simplemente estamos recorriendo los elementos de la fila i y de la columna j en el primer caso, y de la fila $\delta(i)$ y de la columna $\delta(j)$ en el segundo, que como ya se ha demostrado tienen los mismos elementos permutados idénticamente en la fila y en la columna según δ , por ello podemos escribir:

$=\sum_{k,\delta(k)=1}((a_{ik}\, a_{kj}) - (a_{\delta(i),\delta(k)}\, a_{\delta(k),\delta(j)}))=$

pero como :

$a_{ik} = a_{\delta(i)\delta(k)}, \forall\ i,k,\delta(i),\delta(k) \leq n$, y $a_{kj} = a_{\delta(k)\delta(j)}, \forall k,j,\delta(k),\delta(j) \leq n$, podemos afirmar que:$(a_{ik} a_{kj}) - (a_{\delta(i),\delta(k)}\, a_{\delta(k),\delta(j)}) = 0$, $\forall\ i,j,k,\delta(i),\delta(k),\delta(j) \leq n$, por lo que podemos afirmar que :

$\sum_{k,\delta(k)=1}((a_{ik}\, a_{kj}) - (a_{\delta(i),\delta(k)}\, a_{\delta(k),\delta(j)}))=0$, lo que implica que :

$a^2_{ij} = a^2_{\delta(i)\delta(j)}, \forall\ i,j,\delta(i),\delta(j) \leq n$. Como queríamos demostrar.

4.2. Componentes del vector motricidad.

Tomemos una componente p genérica de M^2 perteneciente a Φ [nx1]: $m^2_p = \sum_{j=1} a^2{}_{pj} = \sum_{j=1}(\sum_{k=1} a_{pk}\, a_{kj}), \forall\ p \leq n$.

Tomemos una componente $\delta(p)$ genérica de $M_\delta{}^2$ perteneciente a Φ [nx1]: $m^2_{\delta(p)} = \sum_{\delta(j)=1} a^2_{\delta(p)\delta(j)} = \sum_{\delta(j)=1}(\sum_{\delta(k)=1} a_{\delta(p),\delta(k)}\, a_{\delta(k),\delta(j)})$. $\forall \delta(p) \leq n$

y calculemos la diferencia:

$m^2_p - m^2{}_{\delta(p)} = \sum_{j=1} a^2{}_{pj} - \sum_{\delta(j)=1} a^2{}_{\delta(p)\delta(j)} = \sum_{j=1}(\sum_{k=1} a_{pk}\, a_{kj}) - \sum_{\delta(j)=1}(\sum_{\delta(k)=1} a_{\delta(p),\delta(k)}\, a_{\delta(k),\delta(j)})=$

Extender el sumatorio desde j igual a 1 hasta n es lo mismo que hacerlo de $\delta(j)$ igual a 1 hasta n, simplemente estamos recorriendo los elementos de la fila p en el primer caso, y de $\delta(p)$ en el segundo, que como ya se ha demostrado tienen los mismos elementos permutados idénticamente según δ . Por todo ello podemos escribir:

$=\sum_{j,\delta(j)=1}((\sum_{k=1} a_{pk}\, a_{kj}) - (\sum_{\delta(k)=1} a_{\delta(p),\delta(k)}\, a_{\delta(k),\delta(j)}))=$

Extender el sumatorio desde k igual a 1 hasta n es lo mismo que hacerlo de $\delta(k)$ igual a 1 hasta n, simplemente estamos recorriendo los elementos de la fila p y de la columna j en el primer caso, y de la fila $\delta(p)$ y de la columna $\delta(j)$ en el segundo, que como ya se ha demostrado tienen los mismos elementos permutados idénticamente en la fila y en la columna según δ ; por ello podemos escribir:

$=\sum_{j,\delta(j)=1}(\sum_{k,\delta(k)=1}((a_{pk}\, a_{kj})-(a_{\delta(p),\delta(k)}\, a_{\delta(k),\delta(j)}))=$

Pero como en el apartado anterior se demostró que: $a_{ij}=a_{\delta(i)\delta(j)}, \forall\, i,j,\delta(i),\delta(j)\leq n$,

podemos afirmar que:

$m^2_p-m^2_{\delta(p)}=\sum_{j,\delta(j)=1}(\sum_{k,\delta(k)=1}((a_{pk}\quad a_{kj})-(a_{\delta(p),\delta(k)}\quad a_{\delta(k),\delta(j)}))=0 \qquad \forall\, p,\delta(p) \leq n$, conforme pretendíamos demostrar.

4.3. Componentes del vector dependencia.

Se procede de forma análoga a la descrita en el apartado anterior.

Como resumen podemos afirmar que:

$a_{ij}=a_{\delta(i)\delta(j)}, \forall\, i,j,\delta(i),\delta(j) \leq n$. $a^2_{ij}=a^2_{\delta(i)\delta(j)}, \forall\, i,j,\delta(i),\delta(j) \leq n$.

$m^2_i-m^2_{\delta(i)}, \forall\, i,\delta(i) \leq n$. $d^2_j-d^2_{\delta(j)}, \forall\, j,\delta(j) \leq n$.

5. Influencia para□=w . Matriz de orden w.

Dada la matriz de relaciones directas $[a_{ij}]$, perteneciente al conjunto Φ [nxn] se calcula su potencia de orden w: $[a_{ij}]^w$ que será una nueva matriz también perteneciente al conjunto Φ [nxn] y cuyo elemento genérico a^w_{ij} será: $a^w_{ij}=\sum_{k=1}a^{w-1}_{ik}\, a_{kj}$.

Conforme se indicó al principio de este apartado, y aunque no se haga constar, todos los sumatorios se extienden hasta n.

Sean las aplicaciones:

Ω_M definida de Φ [n x n] sobre Φ [n x 1] tal que:

$\Omega_M[a_{ij}]^w{*}{*}M^w/M^w_i=\Sigma j{=}1a^w_{ij}, \forall\, i,j \leq n$, es decir, que la componente i-ésima del vector M^w es el resultado de sumar todos los elementos de la fila i-ésima de la matriz $[a_{ij}]^w$.

Ω_D definida de Φ [nxn] sobre Φ [1 x n] tal que:

$\Omega_D[a_{ij}]^w{*}{*}D^w/D^w_j=\Sigma_{i=1}a^w_{ij}, \forall\, i,j \leq n$, es decir, que la componente i-ésima del vector D^w es el resultado de sumar todos los elementos de la columna j-ésima de la matriz $[a_{ij}]^w$.

Salvo que se indique lo contrario todos los sumatorios se extienden hasta n..

Tomemos una componente p genérica de M^w perteneciente a Φ [nx1]:

$m^n_p=\sum_{j=1}a^w_{pj}=\sum_{j=1}(\sum_{k=1} a^{w-1}_{pk}\, a_{kj}),\forall\, p \leq n$.

Tomemos una componente q genérica de D^w perteneciente a Φ [1xn]:

$d^w_q=\sum_{i=1} a^w_{iq} =\sum_{i=1}(\sum_{k=1}a^{w-1}_{ik}\, a_{kq}),\forall\, q \leq n$.

Tomemos de nuevo una permutación genérica δ de entre las n! que se pueden obtener con las n variables del conjunto $\mathbb{V}$, y tomemos la matriz de relaciones directas $[a_{\delta(i),\delta(j)}]$, $\forall\, \delta_{(i)}, \delta_{(j)}\leq n$, obtenida tras la permutación de las variables.

Volvamos a tomar las aplicaciones definidas el apartado II-4-6-1 y apliquemoslas sobre la matriz $[a_{\delta(i),\delta(j)}]^w$, a cuyos elementos denominamos $a^w_{\delta(i),\delta(j)}$,

$\forall\ \delta_{(i)}\ ,\delta_{(j)}\leq n$.

Ω_M definida de Φ [nxn] sobre Φ [nx1] tal que:

$\Omega_M[a_{\delta(i),\delta(j)}]^w{**}M_\delta^w/m_{\delta(i)}{}^w=\Sigma j=1\ a^w_{\delta(i),\delta(j)}\ ,\forall\ \delta_{(i)},\delta_{(j)}\leq n$, es decir, que la componente $\delta(i)$-ésima del vector M_δ^w es el resultado de sumar todos los elementos de la fila $\delta(i)$-ésima de la matriz $[a_{\delta(i),\delta(j)}]^w$.

Ω_D definida de Φ [n x n] sobre Φ [1 x n] tal que:

$\Omega_D[a_{\delta(i),\delta(j)}]^w{**}D_\delta^w\ /D\ _{\delta(j)}{}^w=\Sigma i=1\ a^w_{\delta(i),\delta(j)}\ ,\forall\delta_{(i)}\ ,\delta_{(j)}\leq n$, es decir, que la componente $\delta(j)$-ésima del vector D_δ^w es el resultado de sumar todos los elementos de la columna $\delta(j)$-ésima de la matriz $[a_{\delta(i),\delta(j)}]^w$

Salvo que se indique lo contrario todos los sumatorios se extienden hasta n..

Tomemos una componente $\delta(p)$ genérica de M_δ^w perteneciente a Φ[nx1]:

$m^w_{\delta(p)}=\sum_{\delta(j)=1}a^w_{\delta(p)\delta(j)}=\sum_{\delta(j)=1}(\ \sum_{\delta(k)=1}\ a^{w-1}{}_{\delta(p),\delta(k)}\ a_{\delta(k),\delta(j)}\ ),\ \forall\ \delta(p)\leq n$.

Tomemos una componente $\delta(q)$ genérica de $D_\delta{}^w$ perteneciente a Φ [1 x n]:

$d^w{}_{\delta(q)}=\sum_{\delta(i)=1}a^w{}_{\delta(i)\delta(q)}=\sum_{\delta(i)=1}(\sum_{\delta(k)=1}\ a^{w-1}{}_{\delta(i),\delta(k)}\ a_{\delta(k),\delta(q)}\ )\quad\forall\ \delta(q)\leq n$.

Se va a demostrar que las componentes que componen el vector M^w, perteneciente a Φ[nx1], son las mismas que las del vector M_δ^w pero cambiando su ordenación en el sentido que impone la permutación genérica δ que se ha impuesto a las variables del conjunto, y que lo mismo se produce con el vector D^w perteneciente Φ[1xn] y con el vector D_δ^w. Para ello, calculamos las diferencias:

$m^w{}_p-m^w{}_{\delta(p)},\ \forall p,\delta(p)\ \leq n$ y $d^w{}_q-d^w{}_{\delta(q)}\ ,\ \forall q,\delta(q)\ \leq n$ que de ser correcta la aseveración anterior deberán ser siempre nulas.

5.1. Elementos de la matriz de orden w.

Previamente es necesario demostrar que la componente $a^w{}_{ij},\ \forall\ i,j,\leq n$ de la matriz $[a_{i,j}]^w$ es igual a la componente $a^w{}_{\delta(i)\delta(j)},\ \forall\delta(i),\delta(j)\leq n$ de la matriz $[a_{\delta(i),\delta(j)}]^w$ para ello calculemos la diferencia entre $a^w{}_{ij}$ y $a^w{}_{\delta(i)\delta(j)}\forall\ i,j,\delta(i),\delta(j)\leq n$.

$a^w{}_{ij}-a^w{}_{\delta(i)\delta(j)}=\sum_{k=1}a^{w-1}{}_{ik}\ a_{kj})-\sum_{\delta(k)=1}a^{w-1}{}_{\delta(i),\delta(k)}\ a_{\delta(k),\delta(j)}$ Extender el sumatorio desde k igual a 1 hasta n es lo mismo que hacerlo de $\delta(k)$ igual a 1 hasta n. Simplemente estamos recorriendo los elementos de la fila i y de la columna j en el primer caso, y de $\delta(i)$ y $\delta(j)$ en la segunda, que como ya se ha demostrado tienen los mismos elementos permutados idénticamente en la fila y en la columna según δ; por ello podemos escribir:$=\sum_{k,\delta(k)=1}((a^{w-1}{}_{ik}\ a_{kj}\ )-(a^{w-1}{}_{\delta(i),\delta(k)}\ a_{\delta(k),\delta(j)}))=$

pero como :

$a^{w-1}{}_{ik}=a^{w-1}{}_{\delta(i)\delta(k)},\ \forall\ i,k,\delta(i),\delta(k)\ \leq n$, conforme se demostró en el apartado anterior y: $a_{kj}=a_{\delta(k)\delta(j)},\ \forall\ k,j,\delta(k),\delta(j)\ \leq n$, conforme se demostró al estudiar la matriz de relaciones directas, con todo ello podemos afirmar que :$(a^{w-1}{}_{ik}\ a_{kj})-(a^{w-1}{}_{\delta(i),\delta(k)}\ a_{\delta(k),\delta(j)})=0$, $\forall\ i,j,k,\delta(i),\delta(k),\delta(j)\leq n$

por lo que :

$\sum_{k,\delta(k)=1}((a^{w-1}{}_{ik}\, a_{kj})-(a^{w-1}{}_{\delta(i),\delta(k)}\, a_{\delta(k),\delta(j)}))=0$

lo que implica:

$a^w{}_{ij}=a^w{}_{\delta(i)\delta(j)}$, $\forall\ i,j,\delta(i),\delta(j) \le n$, como queríamos demostrar.

5.2. Componentes del vector motricidad.

Tomemos una componente p genérica de M^w perteneciente a Φ [nx1]:

$m^w{}_p=\sum_{j=1}a^w{}_{pj}=\sum_{j=1}(\sum_{k=1} a^{w-1}{}_{pk}\, a_{kj})$, $\forall\ p \le n$.

Tomemos una componente $\delta(p)$ genérica de $M_\delta{}^n$ perteneciente a Φ [nx1]:

$m^w{}_{\delta(p)}=\sum_{\delta(j)=1}a^w{}_{\delta(p)\delta(j)}=\sum_{\delta(j)=1}(\sum_{\delta(k)=1}a^{w-1}{}_{\delta(p),\delta(k)}\, a_{\delta(k),\delta(j)})$. $\forall\ \delta(p) \le n$.

y calculemos la diferencia entre ellas:

$m^w{}_p-m^w{}_{\delta(p)}=\sum_{j=1}a^w{}_{pj}-\sum_{\delta(j)=1}a^w{}_{\delta(p)\delta(j)}=$

$\sum_{j=1}(\sum_{k=1} a^{w-1}{}_{pk}\, a_{kj})-\sum_{\delta(j)=1}(\sum_{\delta(k)=1} a^{w-1}{}_{\delta(p),\delta(k)}\, a_{\delta(k),\delta(j)})$

Extender el sumatorio desde j igual a 1 hasta n es lo mismo que hacerlo de $\delta(j)$ igual a 1 hasta n. Simplemente estamos recorriendo los elementos de la fila p en el primer caso, y de $\delta(p)$ en el segundo, que como ya se ha demostrado tienen los mismos elementos permutados idénticamente según δ, por ello podemos escribir: $\sum_{j,\delta(j)=1}((\sum_{k=1} a^{w-1}{}_{pk}\, a_{kj})-(\sum_{\delta(k)=1} a^{w-1}{}_{\delta(p),\delta(k)}\, a_{\delta(k),\delta(j)}))$

Extender el sumatorio desde k igual a 1 hasta n es lo mismo que hacerlo de $\delta(k)$ igual a 1 hasta n. Simplemente estamos recorriendo los elementos de la fila p y de la columna j en el primer caso, y de la fila $\delta(p)$ y de la columna $\delta(j)$ en el segundo, que como ya se ha demostrado tienen los mismos elementos permutados idénticamente en la fila y en la columna según δ ; por ello podemos escribir:

$= \sum_{j,\delta(j)=1}(\sum_{k,\delta(k)=1}((a^{w-1}{}_{pk}\, a_{kj})-(a^{w-1}{}_{\delta(p),\delta(k)}\, a_{\delta(k),\delta(j)}))$

pero como en el apartado anterior se demostró que: $a^{w-1}{}_{ij}=a^{w-1}{}_{\delta(i)\delta(j)}$ $\forall\ i,j,\delta(i),\delta(j) \le n$, y en el estudio de la matriz de relaciones directas que :

$a_{ij}= a_{\delta(i)\delta(j)}$ $\forall\ i,j,\delta(i),\delta(j) \le n$, por lo que podemos afirmar que:

$m^w{}_p-m^w{}_{\delta(p)}=\sum_{j,\delta(j)=1}(\sum_{k,\delta(k)=1}((a^{w-1}{}_{pk}\, a_{kj})-(a^{w-1}{}_{\delta(p),\delta(k)}\, a_{\delta(k),\delta(j)}))=0$ $\forall\ p,\delta(p) \le n$, conforme pretendíamos demostrar.

5.3. Componentes del vector dependencia.

Tomemos una componente q genérica de D^w perteneciente a Φ [1 x n]:

$d^w{}_q=\sum_{i=1}a^w{}_{iq}=\sum_{i=1}(\sum_{k=1} a^{w-1}{}_{ik}\, a_{kq})$, $\forall\ q \le n$.

Tomemos una componente $\delta(q)$ genérica de $D_\delta{}^w$ perteneciente a Φ [1 x n]:

$d^w{}_{\delta(q)}= \sum_{\delta(i)=1} a^w{}_{\delta(i)\delta(q)} =\sum_{\delta(i)=1}(\sum_{\delta(k)=1} a^{w-1}{}_{\delta(i),\delta(k)}\, a_{\delta(k),\delta(q)})$ $\forall\ \delta(q) \le n$.

y calculemos la diferencia entre ellas:

$d^w{}_q-d^w{}_{\delta(q)} = \sum_{i=1}a^w{}_{iq} -\sum_{\delta(i)=1}a^w{}_{\delta(i)\delta(q)}$ =

$=\sum_{i=1}(\sum_{k=1} a^{w-1}{}_{ik}\, a_{kq})-\sum_{\delta(i)=1}(\sum_{\delta(k)=1} a^{w-1}{}_{\delta(i),\delta(k)}\, a_{\delta(k),\delta(q)})$

Extender el sumatorio desde i igual a 1 hasta n es lo mismo que hacerlo de $\delta(i)$ igual a 1 hasta n. Simplemente estamos recorriendo los elementos de la columna q en el primer caso, y de los elementos de la columna $\delta(q)$ en el segundo, que como ya se ha demostrado tienen los mismos elementos permutados idénticamente según δ ; por ello podemos escribir:

$\sum_{i,\delta(i)=1} \left(\left(\sum_{k=1} a^{w-1}_{ik}\, a_{kq}\right) - \left(\sum_{\delta(k)=1} a^{w-1}_{\delta(i),\delta(k)}\, a_{\delta(k),\delta(q)}\right)\right)$

Extender el sumatorio desde k igual a 1 hasta n es lo mismo que hacerlo de $\delta(k)$ igual a 1 hasta n. Simplemente estamos recorriendo los elementos de la fila i y de la columna q en el primer caso, y de los elementos de la fila $\delta(i)$ y de la columna $\delta(q)$ en el segundo , que como ya se ha demostrado tienen los mismos elementos permutados idénticamente en la fila y en la columna según δ; por ello podemos escribir:

$=\sum_{i,\delta(i)=1} \left(\sum_{k,\delta(k)=1} \left(\left(a^{w-1}_{ik}\, a_{kq}\right) - \left(a^{w-1}_{\delta(i),\delta(k)}\, a_{\delta(k),\delta(q)}\right)\right)\right) =$

pero como en el apartado anterior se demostró que: $a^{w-1}_{ij}=a^{w-1}_{\delta(i)\delta(j)}$

$\forall\ i,j,\delta(i),\delta(j) \leq n$, y en el estudio de la matriz de relaciones directas que :

$a_{ij}=a_{\delta(i)\delta(j)}$, $\forall\ i,j,\delta(i),\delta(j) \leq n$, por lo que podemos afirmar que:

$d^w_q - d^w_{\delta(q)} = \sum_{i,\delta(i)=1}\left(\sum_{k,\delta(k)=1}\left(\left(a^{w-1}_{ik} a_{kq}\right) - \left(a^{w-1}_{\delta(i),\delta(k)}\ a_{\delta(k),\delta(q)}\right)\right)\right) = 0 \quad \forall\ q,\delta(q) \leq n$, conforme pretendíamos demostrar.

6. Conclusiones.

Se ha demostrado que para cualquiera de las n! posibles permutaciones que se pueden realizar, con las n variables, las matrices de cualquier orden son idénticas, elemento a elemento, lo que se puede comprobar deshaciendo la permutación. Como consecuencia directa también lo son los vectores motricidad y dependencia sea cual sea el orden considerado.

De todo ello se puede concluir que la estabilidad de las clasificaciones es una propiedad inherente a las relaciones entre las variables, y por ello a la estructura del sistema, y no a la forma de la matriz, lo que refuerza los fundamentos teóricos del método.

7. Referencias.

Dema, C. (1996). Estructural Analisys Theory: an extensión of General model for studing those casas where stability is not reached, The study of sensitivity as a tool in the strategic planning. Congreso I.F.S.A.M. Paris.

Godet M. (2001). Manuel de prospective stratégique. Ed. Dunod.

Godet M. (2001). Creating Futures: scenario-building as a strategic management tool, Ed. Economica-Brookings.

Gonod P. (1996). Dynamique des systèmes et méthodes prospectives, Travaux et Recherches de Prospective. Futuribles International, No 2, mars 1996.

Godet, M. (1991). Prospectiva y planificación estratégica. Ed. S. G. Editores.

Godet, M. et al (1990). Problèmes et méthodes de prospective. Boîte à Outils. Futuribles-Aditech, mai.

Gonod, P. F. (1994). Contribution au débat sur la Méthodologie prospective2. GRASSE. Jun.