5th International Conference on Industrial Engineering and Industrial Management
XV Congreso de Ingeniería de Organización
Cartagena, 7 a 9 de Septiembre de 2011

Modelo fuzzy de programación lineal entera-mixta para el cálculo de stocks objetivos

Jairo R. Coronado-Hernández [1,2], José P. Garcia-Sabater[2] Julien Maheut[2]

[1]GIPC. Universidad Tecnológica de Bolívar. Parque Tecnológico Carlos Vélez Pombo. Cartagena de indias-Colombia. [2]ROGLE. Dpto. de Organización de Empresas. Universidad Politécnica de Valencia. Camino de Vera s/n, 46022. Valencia-España. coronado@unitecnologica.edu.co, jpgarcia@doe.upv.es, juma2@etsii.upv.es.

Palabras clave: planificación de la producción, stocks objetivos, Fuzzy Set.

1. Introducción

Este trabajo presenta un modelo matemático de programación entera fuzzy para el cálculo de stock objetivos con el fin de dar visión de largo plazo a modelos de planificación en el corto plazo. La aplicación de este modelo se enmarca en sistemas con múltiples productos con demanda estacional e incierta, múltiples periodos de tiempo, capacidad limitada en el sistema de producción y almacenes. La problemática es extraída de una empresa objeto de estudio, especializada en fabricar marcas de distribución y co-packing.

En ese sentido los stocks objetivos se determinan a través de un modelo de planificación fuzzy, bajo el supuesto fundamental que existe incertidumbre en los parámetros de demanda y de la función de costes. Este modelo hace el papel de un modelo de planificación agregada de la producción los cuales son los más apropiados para problemas con estacionalidad (Buxey, 2003). Con el modelo que se propone, se realiza una planificación semestral desde una perspectiva tradicional de la planificación agregada de la producción (aunque no se agregan los productos, sino los periodos) con el propósito de calcular los stocks objetivos semanales que serán entradas a modelos de planificación en el corto plazo. Una de las ventajas principales de este modelo es que no se requiere una estimación precisa de la demanda del mercado.

2. Programación lineal Fuzzy

La programación lineal es la técnica de optimización que con más frecuencia se aplica para la formulación de modelos de planificación de la producción. Sin embargo en el mundo real, los datos o parámetros de entrada, son imprecisos/difusos porque la información es incompleta o no obtenible en el horizonte medio de tiempo (Wang & Liang, 2004). En 1965, Zadeh propone la teoría de los conjuntos difusos (Fuzzy Set) proveyendo un medio efectivo para tratar con información imprecisa. En ese sentido, la teoría de conjuntos Fuzzy aparece de forma ideal como un acercamiento para formular modelos de programación lineal cuando existe imprecisión en los parámetros (Guu & Wu, 1999). En (Bellman & Zadeh, 1970) se describe que las decisiones naturales son tomadas existiendo un ambiente difuso en la función objetivo, las restricciones y en las variables de decisión, porque muchas veces no es posible definirlas con total precisión.

En (Zimmermann, 1976) se introduce por primera vez la teoría de los conjuntos difusos a problemas de programación lineal. En (Zimmermann, 1978) se presenta una aplicación de los conjuntos difusos a problemas de programación lineal con varias funciones objetivos utilizando el operador min; de este modo se hace una conversión equivalente de un modelo de programación lineal Fuzzy a un modelo de programación lineal tradicional con múltiples objetivos. En (Narasimhan, 1980) se introduce una aplicación de los conjuntos difusos al concepto de programación por meta en un ambiente difuso.

En (Mula, Poler, García-Sabater et al., 2006) se presenta una revisión de modelos para planificación de la producción bajo incertidumbre en donde se muestra el uso de la teoría de conjuntos Fuzzy como un método de modelado para abordar este tipo de problema. En (Liang, 2007) introduce una aproximación interactiva de programación lineal posibilista para resolver el problema de planificación agregada de la producción con múltiples productos y múltiples periodos de tiempo, con objetivos y coeficientes imprecisos que siguen una distribución triangular en un ambiente incierto. En (Torabi, Ebadian, & Tanha, 2010) se introduce la teoría de conjuntos difusos a un problema de planificación jerárquica de la producción (HPP) con dos niveles de decisión aplicado a un problema real industrial; se presentan dos modelos: en el primer nivel, un modelo de planificación agregada por familia de producto, y el segundo nivel un modelo Fuzzy de desagregación. En (Mula, Poler, & Garcia, 2006) se presenta el modelado de un sistema MRP utilizando programación flexible para solucionar un modelos de programación Fuzzy.

En la literatura, la programación lineal Fuzzy se puede clasificar en diferentes categorías. Si los parámetros son imprecisos se modeladan siguiendo una distribución posibilista. De lo contrario se basan en una función de pertenencia que modela las preferencias subjetivas (Lai & Hwang, 1992). En general, esta clasificación se da en dos clases mayores (Torabi, Ebadian, & Tanha, 2010):

- Programación matemática flexible
- Programación matemática posibilista

En los modelos de programación matemática flexible, las funciones de pertenencia de los objetivos y las restricciones son generalmente basadas y determinadas por las preferencias subjetivas de los decisores. En contraste, la programación matemática posibilista está basada sobre distribuciones posibilistas que son determinadas objetivamente de información histórica.

3. Modelo de programación Fuzzy propuesto

En esta sección se presenta un modelo de programación entera Fuzzy para resolver el problema de calcular los stocks objetivos a partir de un modelo de planificación de la producción. En este problema, los niveles de aspiración de los costes totales de la función objetivo y la demanda del mercado, se consideran datos imprecisos (Fuzzy). La demanda del mercado se compone de los pedidos en firme y las previsiones de ventas. Los pedidos en firme se conocen al principio de cada horizonte de planificación mientras que la demanda prevista se basa en estimaciones de modelos de pronóstico y en el peor de los casos en supuestos incrementales basados en la experiencia. Estos factores hacen que la restricción asociada a la demanda se pueda modelar como Fuzzy dado que hay una imprecisión en la misma. El decisor no quiere realmente maximizar o minimizar una función objetivo sino que quiere conseguir un nivel de aspiración. Una restricción por ejemplo de tipo “≤” es estricta (Crisp) matemáticamente hablando, pero en fuzzy puede ser violada con alguna sensibilidad.

Se asume que el planificador establece el nivel de aspiración para el efecto del objetivo que se quiere lograr, o utilizar la metodología propuesta en (Mula, 2004) utilizando la aproximación de (Werners, 1987) en donde el objetivo Fuzzy se construye a partir la generación de dos modelos lineales basada en la tolerancia de las restricciones. El modelo Fuzzy se plantea a partir de las restricciones (1) a (15).

$$\sum_{t\in T}\sum_{i\in I}\left(H_{it}x_{it}+\left(He_{it}-H_{it}\right)xe_{it}\right) + \sum_{t\in T}\sum_{k\in K}\left(PEN_{kt}\left(tu^{+}_{kt}+tu^{-}_{kt}\right)+CT_{kt}w_{kt}\right)\leq^{f} Z \qquad (1)$$

$$-INI_i + x_{i'1'} - p_{i'1'} =^{f} -D_{i'1'} \qquad \forall i \qquad (2)$$

$$x_{i(t-1)} - x_{it} + p_{it} =^{f} D_{it} \qquad \forall i, \forall t>1 \qquad (3)$$

$$p_{it} = \sum_{k\in K} y_{ikt} \qquad \forall i, \forall t \qquad (4)$$

$$\sum_{i\in I} y_{ikt} \leq TP_k\left(DIAS_t z_{kt} + w_{kt}\right) \qquad \forall k, \forall t \qquad (5)$$

$$z_{kt} - z_{k,t-1} = tu^{+}_{kt} - tu^{-}_{kt} \qquad \forall k, \forall t>1 \qquad (6)$$

$$y_{ikt} \leq MY_{ik} \qquad \forall i, \forall k, \forall t \qquad (7)$$

$$z_{kt} \leq LZ_{kt} \qquad \forall k, \forall t \qquad (8)$$

$$w_{kt} \leq LW_{kt} \qquad \forall k, \forall t \qquad (9)$$

$$u_t = ui_t + ue_t \qquad \forall t \qquad (10)$$

$$ui_t = \sum_{i\in I} x_{it} - ue_t \qquad \forall t \qquad (11)$$

$$ue_t = \sum_{i\in I} xe_{it} \qquad \forall t \qquad (12)$$

$$\sum_{k\in K}\sum_{i\in I} C_{ir} y_{ikt} = mt_{rt} \qquad \forall t, \forall r \qquad (13)$$

$$y_{ikt}, p_{it}, x_{it}, xe_{it}, u_t, ui_t, ue_t, \lambda_{it}, mt_{rt} \geq 0 \qquad \forall i, \forall k, \forall r, \forall t \qquad (14)$$

$$\left(z_{kt}, w_{kt}, tu^{+}_{kt}, tu^{-}_{kt}\right) \in ¢ \qquad \forall k, \forall t \qquad (15)$$

El símbolo $£^{f}$ es la versión Fuzzy de $\leq$ y puede interpretarse como: “en principio menor o igual que”. Dentro del marco de la programación flexible, se han propuesto diversos enfoques de modelado como se muestra en (Zimmermann, 1978) y (Luhandjula, 1982). Para el modelado se toma el enfoque propuesto por (Bellman & Zadeh, 1970), en donde la función objetivo y las restricciones Fuzzy se describen como desigualdades especificadas por su función de pertenencia. En la Tabla 1, se presentan los Índices, parámetros y variables del modelo.

Tabla 1. Índices, parámetros y variables

	Índices		
i Î *I*	Índice del número de productos que pertenece al conjunto *I*		
k Î *K*	Índice de la línea de fabricación del conjunto *K*		
t Î *T*	Índice de periodos del conjunto *T*		
r Î *R*	Índice de materias primas del conjunto *R*		
	Parámetros		
D_{it}	Demanda del producto *i* en el periodo *t* (Pallet/semanas)	Y_{ik}	Matriz de asignación binaria del producto *i* en la línea de fabricación *k*
H_{it}	Coste de Almacenamiento interno del producto *i* en el periodo *t* (Pallet/semana)	INI_i	Stock inicial del producto *i* (Pallet)
He_{it}	Coste de Almacenamiento externo del producto *i* en el periodo *t* (Pallet/semana)	PEN_{kt}	Penalidad por cambio del número de turnos de un periodo a otro
TP_k	Ritmo de Fabricación del la línea de fabricación *k* (Pallet/turno)	LZ_{kt}	Numero de turnos normales máximos en la línea *k* en el periodo *t* (Turnos/Días)
LW_{kt}	Numero de turnos extras máximos en la línea *k* en el periodo *t* (Turnos/Semana)	$UMAX$	Capacidad máxima de almacenamiento interno de producto terminado (Pallet)
$DIAS_t$	Número de días que tiene la semana *t* (Días)	TU_{kt}	Numero de turnos fijos de la línea *k* en el período *t* (Turnos)
C_{ir}	Consumo de materia prima del producto *i* de la materia prima *r* (Unidades/pallet)		
	Variables		
y_{ikt}	Numero de pallet producidos del producto *i* en la línea *k* en el periodo *t* (Pallet)	p_{it}	Numero de pallet producidos del producto *i* en el periodo *t* (Pallet)
x_{it}	Stock total del producto *I* en el periodo *t* (Pallet)	xe_{it}	Stock a enviar a almacenamiento externo del producto *i* en el periodo *t* (Pallet)
ui_t	Stock a almacenar externamente en el periodo *t* (Pallet)	ue_t	Stock a almacenar internamente en el periodo *t* (Pallet)
z_{kt}	Turnos normales a asignar en un día para la línea *k* en el periodo *t* (Turnos)	w_{kt}	Turnos extras a asignar para la línea *k* para el periodo *t* (Turnos)
tu^{+}_{kt}	Turnos de más que se añaden a una línea *k* en *t* respecto a *t-1*	tu^{-}_{kt}	Turnos de menos que se quitan a una línea *k* en *t* respecto a *t-1*
mt_{rt}	Requerimiento de materia prima *r* para el periodo *t* (Unidades)		

De este modelo Fuzzy se generan un modelo Crisp equivalente asumiendo que se desea obtener una solución óptima precisa. En ese sentido, se procede a maximizar solución de manera que se maximice el grado de satisfacción en (16) y (17).

$$\mu_{\tilde{D}}(x) = \min_{i}\left\{\mu_{\hat{\imath}}(x)\right\} \qquad (16)$$

$$\max_{x\geq 0}\min_{i}\left\{\mu_{\hat{\imath}}(x)\right\} = \max_{x\geq 0}\mu_{\tilde{D}}(x) \qquad (17)$$

Utilizando la aproximación descrita en (Werners, 1987) y (Mula, 2004), se construye una función de pertenencia asumiendo un incremento lineal sobre el intervalo de tolerancia para las restricciones. Estas funciones de pertenecía se muestran en (18) y (19).

$$\mu_i(x) = \begin{cases} 1 & si \quad B_i x \leq d_i \\ 1 - \dfrac{B_i x - d_i}{p_i} & si \quad d_i < B_i x \leq d_i + p_i \\ 0 & si \quad B_i x > d_i + p_i \end{cases} \qquad \forall i = 1,\ldots,m+1 \quad (18)$$

$$\mu_i(x) = \begin{cases} 1 & si \quad B_i x \geq d_i \\ 1 - \dfrac{d_i - B_i x}{p_i} & si \quad d_i - p_i < B_i x \leq d_i \\ 0 & si \quad B_i x < d_i - p_i \end{cases} \qquad \forall i = 1,\ldots,m+1 \quad (19)$$

De esta manera el modelo matemático equivalente en Crisp se muestra de (20) a (25). El modelo fue implementado en AMPL sobre en Java utilizando como optimizador LpSolve 5.5.015 (Berkelaar, Eikland, & Notebaert, 2005).

$$Maximizar \quad \alpha \qquad (20)$$

Sujeto a:

$$\sum_{t\in T}\sum_{i\in I}\left(H_{it}x_{it} + \left(He_{it} - H_{it}\right)xe_{it}\right) + \sum_{t\in T}\sum_{k\in K}\left(PEN_{kt}\left(tu_{kt}^{+} + tu_{kt}^{-}\right) + CT_{kt}w_{kt}\right) \leq Z_0 + (1-\alpha)VZ \qquad (21)$$

$$INI_i - x_{i'1'} + p_{i'1'} \leq D_{i'1'} + (1-\alpha)VD_{i'1'} \quad \forall i \qquad (22)$$

$$-INI_i + x_{i'1'} - p_{i'1'} \leq -D_{i'1'} + (1-\alpha)VD_{i'1'} \quad \forall i \qquad (23)$$

$$x_{i(t-1)} - x_{it} + p_{it} \le D_{it} + (1-\alpha)VD_{it} \qquad \forall i, \forall t > 1 \tag{24}$$

$$- x_{i(t-1)} + x_{it} - p_{it} \le - D_{it} + (1-\alpha)VD_{it} \qquad \forall i, \forall t > 1 \tag{25}$$

Este modelo está sujeto a las restricciones (4) a (15). El valor Z_0 es un valor estimado correspondiente al límite inferior del intervalo de tolerancia para el nivel deseado de costes totales generado por el plan de producción. Por otro lado, VZ representa la máxima extensión de Z_0 en el intervalo de tolerancia de los costes totales. El valor D_{it} corresponde al límite inferior en el intervalo de tolerancia para la demanda del producto *i* en el periodo *t*; Por otro lado, VD_{it} representa la máxima extensión de la demanda en su intervalo de tolerancia.

4. Caso de aplicación

La aplicación se realizo en una empresa dedica a la fabricación marcas de distribución y co-packing, especializada en diferentes tipos de cerveza, agua y una amplia variedad de refrescos con y sin gas. La empresa maneja aproximadamente 140 referencias, siete líneas de fabricación y un horizonte de planificación de 52 semandas. Las materias primas requeridas para la fabricación de los productos son comunes dependiendo del tipo producto. Existen diferentes líneas de fabricación en las que uno o más productos pueden ser procesados dependiendo del grado de compatibilidad producto-línea y de la compatibilidad producto-producto para minimizar los tiempos de alistamiento de las líneas.

Cada una de estas líneas de fabricación tiene una capacidad limitada la cual depende de su operatividad diaria en función del número de turnos de trabajos. Cada turno de trabajo comprende una jornada de ocho horas y como máximo en cada día son posibles 3 turnos de trabajos dentro de las jornadas laborales normales en el número de días hábiles del calendario laboral. Como existe capacidad de producción limitada y existe un almacén de producto terminado limitado, en épocas de preparación previa para enfrentar la alta demanda, se recurre a almacenar los productos en almacenes externos dado que la capacidad interna ha llegado a su límite, lo cual incurre en mayores costes por alquiles de espacio y en transporte de los productos a los operadores externos.

Al utilizar el modelo se calculan las coberturas objetivos utilizando con un modelo de aproximadamente 80.000 variables x 80.000 restricciones. Una vez calculadas las coberturas se re-planifica cada semana en un horizonte de ocho semanas teniendo como guía las coberturas objetivos que dan visión de largo plazo a los planificadores. De este modo es posible enfrentarse a la estacionalidad e incertidumbre de la demanda siguiendo el patrón de las coberturas objetivos previamente calculada, y adaptándose a la demanda real que va ocurriendo semana a semana.

5. Conclusiones

En este trabajo se presentó un modelo de programación matemática Fuzzy de planificación de la producción y almacenes. El objetivo del modelo es calcular los stocks objetivos semanales que serán entradas para modelos de planificación en el corto plazo, con el propósito de dar visón de largo plazo a modelos del corto plazo. Con el modelo se realiza una analogía a la planificación agregada de la producción con el fin de moldear la estacionalidad de la demanda y a su vez manejar de forma parcial la incertidumbre a través de la programación flexible. El modelo de programación matemática Fuzzy fue convertido a Crisp utilizando el operador min y utilizando una función de pertenencia asumiendo un incremento lineal.

Referencias

Bellman, R.E. & Zadeh, L.A. 1970. Decision-making in a fuzzy environment. *Management Science*, 17, (4)

Berkelaar, M., Eikland, K., & Notebaert, P. lpsolve: Open source (mixed-integer) linear programming system, version 5.5.0.15. 2005.

Buxey, G. 2003. Strategy not tactics drives aggregate planning. *International Journal of Production Economics*, 85, (3) 331-346.

Guu, S.M. & Wu, Y.K. 1999. Two-phase approach for solving the fuzzy linear programming problems. *Fuzzy Sets and Systems*, 107, (2) 191-195.

Jimenez, M., Arenas, M., Bilbao, A., & Rodriguez, M.V. 2007. Linear programming with fuzzy parameters: An interactive method resolution. *European Journal of Operational Research*, 177, (3) 1599-1609.

Lai, Y.J. & Hwang, C.L. 1992. *Fuzzy mathematical programming:(methods and applications)* Springer.

Liang, T.F. 2007. Application of interactive possibilistic linear programming to aggregate production planning with multiple imprecise objectives. *Production Planning & Control*, 18, (7) 548-560.

Luhandjula, M.K. 1982. Compensatory operators in fuzzy linear programming with multiple objectives. *Fuzzy Sets and Systems*, 8, (3) 245-252.

Mula, J. 2004. *Modelos para la planificación de la producción bajo incertidumbre, aplicación en una empresa del sector del automóvil.* Editorial de la Universidad Politécnica de Valencia.

Mula, J., Poler, R., & Garcia, J.P. 2006. MRP with flexible constraints: A fuzzy mathematical programming approach. *Fuzzy Sets and Systems*, 157, (1) 74-97.

Mula, J., Poler, R., Garc∅a-Sabater, J.P., & Lario, F.C. 2006. Models for production planning under uncertainty: A review. *International Journal of Production Economics*, 103, (1) 271-285.

Narasimhan, R. 1980. Goal programming in a fuzzy environment. *Decision Sciences*, 11, (2) 325-336.

Torabi, S.A., Ebadian, M., & Tanha, R. 2010. Fuzzy hierarchical production planning (with a case study). *Fuzzy Sets and Systems*, 161, (11) 1511-1529.

Wang, R.C. & Liang, T.F. 2004. Application of fuzzy multi-objective linear programming to aggregate production planning. *Computers & Industrial Engineering*, 46, (1) 17-41.

Werners, B. 1987. Interactive multiple objective programming subject to flexible constraints. *European Journal of Operational Research*, 31, (3) 342-349.

Zadeh, L.A. 1965. Fuzzy sets*. *Information and control*, 8, (3) 338-353.

Zimmermann, H.-J. 1976. Description and Optimization of Fuzzy Systems. *International Journal of General Systems 2*, 2, 209-215.

Zimmermann, H.-J. 1978. Fuzzy programming and linear programming with several objective functions. *Fuzzy Sets and Systems*, 1, (1) 45-55.