

Modelo de PLEM mejorado para el Accessibility Windows Assembly Line Balancing Problem (AWALBP)

Enhanced MILP model for the Accessibility Assembly Line Balancing Problem (AWALBP)

Calleja Sanz G¹, Corominas Subias A, García Villoria A, Pastor Moreno R

Abstract (English) The Accessibility Windows Assembly Line Balancing Problem (AWALBP) occurs in those assembly lines where the length of the workpiece is large relative to the width of the workstations. As a result, each workstation can only access to the limited portion of workpiece(s) that is inside its accessibility window. In previous works we proposed a mixed-integer linear programming (MILP) model and a heuristic decomposition approach to solve AWALBP. Computational results revealed the size limits of the instances that could be solved. In this work, we provide an enhanced MILP model using reformulations and additional bound constraints, which significantly improves the percentage of the instances optimally solved.

Resumen (Castellano) El problema denominado Accessibility Windows Assembly Line Balancing Problem (AWALBP) ocurre en aquellas líneas de montaje donde la longitud de las piezas es mayor que el ancho de las estaciones que las procesan. Como resultado, cada estación solamente tiene acceso a la porción limitada de las piezas que están dentro de su ventana de accesibilidad. En trabajos anteriores se presentó un modelo de programación lineal entera mixta (PLEM) y una heurística basada en la descomposición del problema para resolver el AWALBP. En este trabajo se presenta un modelo de PLEM mejorado mediante reformulacio-

¹ Gema Calleja Sanz (✉)

Instituto de Organización y Control (IOC). Universitat Politècnica de Catalunya (UPC). Avda Diagonal, 647, 11th floor, 08028 Barcelona, Spain. e-mail: gema.calleja@upc.edu

nes y adición de cotas, el cual permite aumentar significativamente el porcentaje de los ejemplares resueltos óptimamente.

Keywords: accessibility windows, line balancing, mixed-integer linear programming

Palabras clave: ventanas de accesibilidad, equilibrado de líneas, programación lineal entera mixta

1. Introducción

En los problemas más extendidos de equilibrado de líneas se suele asumir que cada estación tiene acceso a toda una pieza entera al mismo tiempo, y que cada pieza solamente puede ser procesada por una única estación al mismo tiempo. Sin embargo, el problema denominado Accessibility Windows Assembly Line Balancing Problem (AWALBP) presenta la particularidad de que la longitud de las piezas es mayor que el ancho de las estaciones que las procesan (Fig. 1). Como consecuencia, una misma pieza puede ser procesada por varias estaciones a la vez, y una misma estación puede procesar partes de dos piezas consecutivas a la vez.

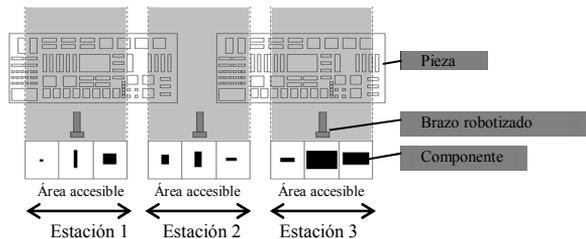


Fig. 1 Ejemplo de una línea de montaje con ventanas de accesibilidad

El AWALBP es una variante del problema generalizado de equilibrado de líneas (GALBP) que ocurre en varios entornos de producción automatizados, por ejemplo, en el montaje automatizado de placas de circuitos impresos (Tazari et al, 2006). Este problema fue descrito por Müller-Hanneman y Weihe (2006) y formalizado con un modelo de programación lineal entera mixta (PLEM) por Corominas y Pastor (2009). Dicho modelo fue implementado por Calleja et al (2011a) y se resolvieron de forma óptima ejemplares hasta cierto límite. Posteriormente, se desarrolló una heurística basada en la descomposición del problema (Calleja et al 2011b).

En este trabajo se presenta un modelo de PLEM mejorado, cuyas modificaciones respecto al modelo inicial consisten en i) reformulación de variables y restricciones y ii) adición de cotas. La estrategia de resolución propuesta consiste en la combinación de una heurística y el modelo propuesto. Los resultados de la experiencia computacional realizada revelan un incremento significativo del número

de ejemplares resueltos. El resto de este trabajo se estructura como sigue. En la sección 2 se describe el problema. En la sección 3 se presenta la estrategia de resolución y el modelo de PLEM mejorado. En la sección 4 se presentan los resultados computacionales. Por último, la sección 5 contiene las conclusiones y las futuras líneas de investigación.

2. Descripción del problema

Un número (potencialmente infinito) de piezas idénticas deben ser procesadas en la línea de montaje. Las piezas se colocan sobre la línea con una separación constante entre sí y avanzan mediante una cinta transportadora a través de varias estaciones en serie. El proceso de montaje es cíclico y consta de un número S de etapas estacionarias separadas entre sí por un *paso de avance*. En la etapa estacionaria s ($s=1, \dots, S$), la línea está inmóvil, y las estaciones realizan tareas de montaje sobre las piezas. Una tarea consiste en tomar un componente de un alimentador y colocarlo en una posición predefinida de la pieza. Una vez las estaciones han realizado todas las tareas correspondientes a dicha etapa estacionaria, se produce un paso de avance δ_s , mediante el cual las piezas son transportadas hacia delante una distancia determinada ($\Delta \cdot \delta_s$, donde Δ es una longitud denominada paso elemental, que depende de la tecnología de la línea).

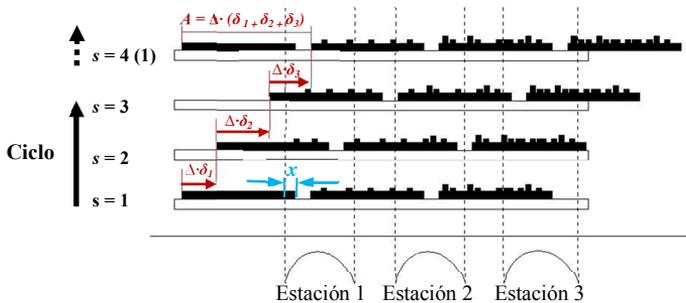


Fig. 2 Esquema de avance en un ciclo de montaje con tres etapas estacionarias

El movimiento de las piezas en la línea se repite cíclicamente según un *esquema de avance*, que determina la posición exacta de las piezas en cada una de las etapas estacionarias del ciclo. Debido a la accesibilidad limitada de cada estación, habitualmente ocurre que una tarea solamente puede ser realizada en un subconjunto de etapas estacionarias, específicamente en aquellas etapas en las que la tarea es accesible desde su estación correspondiente. La Fig.2 muestra cuatro instantáneas de la posición de las piezas en un ciclo de montaje con tres etapas estacionarias ($S=3$). Inicialmente las piezas se sitúan en la línea tomando como referencia la posición del borde derecho de la primera pieza, situada con un desplazamiento x respecto al límite izquierdo de la primera estación. Las flechas al inicio

de cada etapa estacionaria indican los movimientos de la línea desde la etapa actual hacia la etapa siguiente. En la siguiente etapa después de haberse completado un ciclo, una nueva pieza entra en la línea. Al mismo tiempo, una pieza totalmente terminada abandona la línea. Una vez completado el ciclo, las piezas vuelven a ocupar la misma posición que en la primera etapa del ciclo anterior, y se han desplazado una distancia A , que corresponde a la suma de las distancias recorridas en los pasos de avance. De este modo, el esquema de avance queda definido por:

- El desplazamiento inicial x de las piezas en la primera etapa del ciclo.
- El número S de etapas estacionarias (igual al número de pasos de avance).
- La secuencia de las distancias recorridas en cada uno de los pasos de avance, $\Delta \cdot \delta_s$ ($s = 1, \dots, S$).

El problema de optimización consiste en determinar:

- i) un esquema de avance y
- ii) para cada tarea, la asignación a una etapa estacionaria en la que su posición sea accesible desde la estación que la debe procesar.

El conjunto de estaciones que pueden realizar una tarea es parte del input. Debido a la tecnología de la línea, puede ocurrir que dicho conjunto esté formado por una única estación. En nuestro problema, inspirado en el caso real descrito por Muller-Hanneman y Weihe (2006), dicho conjunto está formado por una sola estación.

El objetivo del problema es la minimización del tiempo de ciclo, que consiste en minimizar la suma de i) el tiempo de desplazamiento en las etapas de avance (correspondiente al tiempo para transportar las piezas a velocidad máxima en la línea más un tiempo adicional T para acelerar/desacelerar la línea entre dos etapas estacionarias consecutivas) y ii) el tiempo de proceso en las S etapas estacionarias. Dado que el tiempo para transportar las piezas en la línea a velocidad máxima es constante, no se tiene en cuenta en la función objetivo:

$$[MIN]z = T \cdot S + \sum_{s=1}^S C_s \quad (1)$$

donde C_s corresponde a las duraciones de cada una de las etapas estacionarias que constituyen un ciclo.

3. Estrategia de resolución

La estrategia de resolución propuesta consiste en la combinación de dos elementos: i) la adición de cotas de la función objetivo y del número de etapas estacionarias, obtenidas mediante la heurística descrita en Calleja et al (2009) y ii) un modelo de PLEM mejorado con relación al propuesto por Corominas y Pastor (2009), como se explica a continuación.

La heurística mencionada anteriormente proporciona una solución factible con el menor número de etapas estacionarias para un desplazamiento inicial x dado. Dicha heurística se aplica iterativamente para cada uno de los valores posibles de desplazamiento inicial x y, entre las soluciones generadas, se selecciona la solución con el menor valor de la función objetivo, lo que proporciona una cota superior del valor óptimo de la función objetivo, UB_{CT} . De las soluciones generadas, la de menor número de etapas estacionarias proporciona una cota inferior del número de etapas estacionarias, LB_S .

La cota inferior de la función objetivo, LB_{CT} , se obtiene mediante la suma de las cotas inferiores de los dos términos que la componen: i) $T \cdot LB_S$ más ii) una cota inferior del tiempo de proceso $\sum_{s=1}^S C_s$, denominada W_{max} , correspondiente al tiempo de proceso de la estación más cargada.

Finalmente, se tiene que el número de etapas estacionarias de la solución óptima no puede ser mayor que la diferencia entre UB_{CT} y W_{max} dividida por el tiempo T , lo cual proporciona el valor de la cota superior del número de etapas estacionarias, UB_S .

El modelo de PLEM mejorado es el que se propone a continuación.

Datos

- N número de tareas
- m número de estaciones
- $[L_i, R_i]$ ventana de accesibilidad de la estación i ($i = 1, \dots, m$), donde $L_i = 0$,
 $L_i < R_i$ ($i = 1, \dots, m$), $R_i < L_{i+1}$ ($i = 1, \dots, m-1$)
- A_0 longitud de la pieza
- A distancia entre los bordes derechos de dos piezas consecutivas en la línea
- T tiempo para acelerar / desacelerar la línea entre dos etapas estacionarias consecutivas
- Δ longitud de un paso elemental. Sin pérdida de generalidad, todas las magnitudes de longitud son múltiplos de Δ . En nuestro trabajo, Δ es un valor entero ($\Delta=1$), y en consecuencia, todas las magnitudes de longitud son también enteras
- p_j tiempo de proceso de la tarea j ($j = 1, \dots, N$)
- a_j ($0 \leq a_j \leq A_0$), distancia respecto al borde derecho de la pieza correspondiente a la tarea j ($j = 1, \dots, N$)
- J_0 conjunto de tareas ($|J_0| = N$)
- J_i conjunto de tareas a realizar en la estación i ($i = 1, \dots, m$), donde
 $\bigcup_{i=1, \dots, m} J_i = J_0$ y $J_i \cap J_k = \emptyset \quad \forall i, k$
- \hat{S} cota superior del número de etapas estacionarias en un ciclo ($\hat{S} \leq A / \Delta$)

Variables

- $\delta_s \in Z^+$ número de pasos elementales del paso de avance s ($s=1, \dots, \hat{S}$)
- $\eta_s \in \{0,1\}$ $\eta_s = 1$ sii el paso de avance s existe

- C_s tiempo de proceso, para toda la línea, correspondiente a la etapa estacionaria siguiente al paso de avance $s-1$ ($j=1, \dots, N; s=1, \dots, \hat{S}$)
- $y_{js} \in \{0,1\}$ $y_{js} = 1$ sii la tarea j se realiza durante la etapa estacionaria siguiente al paso de avance $s-1$ ($j=1, \dots, N; s=1, \dots, \hat{S}$)
- $x \geq 0$ desplazamiento inicial del borde derecho de la primera pieza en la línea con respecto al límite izquierdo de la estación 1 (donde $L_1=0$):
 $0 \leq x \leq \min(R_1 + a_1^{\min}, A - \Delta)$ y $a_1^{\min} = \min_{j \in J_1} a_j$
- $k_j \in Z$ número de piezas en la línea que preceden una pieza cuando la tarea j está siendo realizada en la misma ($j=1, \dots, N; kmin_j \leq k_j \leq kmax_j$), donde, ($i | j \in J_i$):

$$kmin_j = \left\lceil \frac{L_i + a_j - \min(R_1 + a_1^{\min}, A - \Delta) - A + \Delta}{A} \right\rceil \text{ y } kmax_j = \left\lfloor \frac{R_i + a_j}{A} \right\rfloor$$

Restricciones

$$[MIN] z = T \cdot \sum_{s=1}^{\hat{S}} \eta_s + \sum_{s=1}^{\hat{S}} C_s \quad (1)$$

$$\sum_{s=1}^{\hat{S}} \delta_s = \frac{A}{\Delta} \quad (2)$$

$$\delta_s \leq \frac{A}{\Delta} \cdot \eta_s \quad s = 1, \dots, \hat{S} \quad (3)$$

$$\eta_s \leq \delta_s \quad s = 1, \dots, \hat{S} \quad (4)$$

$$\eta_{s+1} \leq \eta_s \quad s = 1, \dots, \hat{S} - 1 \quad (5)$$

$$A \cdot k_j - a_j + x + \Delta \cdot \sum_{l=1}^{s-1} \delta_l \geq L_i - M_{js} \cdot (1 - y_{js}) \quad s = 1, \dots, \hat{S}; j = 1, \dots, N; i | j \in J_i \quad (6)$$

$$A \cdot k_j - a_j + x + \Delta \cdot \sum_{l=1}^{s-1} \delta_l \leq R_i + M'_{js} \cdot (1 - y_{js}) \quad s = 1, \dots, \hat{S}; j = 1, \dots, N; i | j \in J_i \quad (7)$$

$$\sum_{s=1}^{\hat{S}} y_{js} = 1 \quad j = 1, \dots, N \quad (8)$$

$$\sum_{j \in J_i} p_j \cdot y_{js} \leq C_s \quad i = 1, \dots, m; s = 1, \dots, \hat{S}; \quad (9)$$

$$\sum_{j \in J_i} y_{js} \leq |J_i| \cdot \eta_s \quad i = 1, \dots, m; s = 1, \dots, \hat{S}; \quad (10)$$

donde ($i | j \in J_i$):

$$M_{js} = L_i - A \cdot kmin_j + a_j - \Delta \cdot (s-1)$$

$$M'_{js} = A \cdot (kmax_j + 1) + \min(R_1 + a_1^{\min}, A - \Delta) - R_i - a_j$$

El objetivo (1) es la minimización del tiempo de ciclo. La restricción (2) impone que el número de pasos elementales en un ciclo corresponde a la distancia entre los bordes derechos de dos piezas consecutivas; (3) aseguran que el paso s existe

si tiene un número positivo de pasos elementales; (4) evitan la existencia de pasos de avance de distancia nula de forma que, si el paso de avance s existe, entonces tiene un número positivo de pasos elementales; (5) eliminan simetrías, asegurando que el paso de avance s existe sólo si $s-1$ existe; (6) y (7) garantizan, para cada tarea, que es accesible, desde su estación correspondiente, durante la etapa estacionaria en la que la tarea debe realizarse; (8) imponen que cada tarea sea asignada a una única etapa estacionaria; (9), que el tiempo de proceso correspondiente a las etapas estacionarias no es menor que el tiempo de proceso en cualquiera de las estaciones; finalmente, (10) imponen la existencia de una etapa estacionaria cuando al menos una tarea ha sido asignada a la misma.

Las modificaciones incorporadas al modelo son las siguientes. En la nueva formulación, se incorporaron al modelo las cotas superiores e inferiores del tiempo de ciclo y del número de etapas estacionarias descritas anteriormente. Por otro lado, se eliminó la variable entera k_j , que representa el número de piezas en la línea que preceden una pieza cuando la tarea j está siendo realizada en la misma. En su lugar, se introdujo la variable binaria b_{jsk} , que es igual a 1 si la tarea j se realiza en la etapa estacionaria s y hay k piezas en la línea que preceden la pieza cuando la tarea j está siendo realiza en la misma ($j=1,\dots,N$, $s=1,\dots,\hat{S}$; $k=kmin_j,\dots,kmax_j$). A consecuencia de la introducción de esta variable, las restricciones (6) y (7) se transforman en las restricciones (6') y (7'):

$$A \cdot k - a_j + x + \Delta \cdot \sum_{l=1}^{s-1} \delta_l \geq L_l - M'_{js} \cdot (1 - b_{jsk}) \quad s = 1, \dots, \hat{S}; j = 1, \dots, N; k = kmin_j, \dots, kmax_j \quad (6')$$

$$A \cdot k - a_j + x + \Delta \cdot \sum_{l=1}^{s-1} \delta_l \leq R_l - M'_{js} \cdot (1 - b_{jsk}) \quad s = 1, \dots, \hat{S}; j = 1, \dots, N; k = kmin_j, \dots, kmax_j \quad (7')$$

La estrategia de resolución propuesta combina la heurística y el modelo de PLEM mejorado como se explica a continuación. Dada una solución factible inicial que proporciona una cota superior del tiempo de ciclo, UB_{CT} , se evalúa su optimalidad por comparación con la cota inferior del tiempo de ciclo, LB_{CT} . Si ambos valores coinciden, se concluye que la solución inicial es óptima. En caso contrario, se lanza el modelo de PLEM mejorado, el cual proporciona uno de los siguientes cuatro resultados: i) no hay soluciones factibles, lo cual certifica que la solución inicial es óptima, ii) una solución óptima, iii) una solución factible, con un tiempo de ciclo menor que el de la solución inicial, y iv) no consigue hallar una solución factible en el límite de una hora de tiempo computacional. En los dos primeros casos, el modelo proporciona una solución óptima, mientras que en los dos casos restantes se obtiene una solución factible (en el caso iv) corresponde a la solución proporcionada por la heurística).

4. Experiencia computacional

Con el fin de identificar el porcentaje de ejemplares que es posible resolver mediante la estrategia propuesta, se realizó un estudio computacional que se describe

a continuación. Se generó un juego de 1.200 ejemplares con un número creciente de tareas (de 50 a 1000), estaciones (de 5 a 40) y longitudes de piezas (11 a 40 unidades de longitud (ul)). El ancho de las estaciones se fijó a 10 ul y el tiempo T de aceleración/desaceleración a 200 unidades de tiempo.

Se utilizó el solver IBM ILOG CPLEX 12.2, con un límite de tiempo computacional de una hora y un gap absoluto de 0,999999. Los resultados muestran un aumento significativo en el porcentaje de las instancias resueltas de forma óptima, del 39,50% en nuestro anterior modelo hasta el 73,08% en el modelo de PLEM propuesto en este trabajo. Análogamente, se consiguió aumentar el porcentaje de instancias resueltas de forma óptima para todas las longitudes de placa. Específicamente, se logró resolver el 99.5, 97.5, 74.5, 42 y 25% de los ejemplares correspondientes a piezas de hasta 20, 25, 30, 35 y 40 ul , respectivamente.

5. Conclusiones y futuras líneas de investigación

En este trabajo se considera el problema denominado Accessibility Windows Assembly Line Balancing Problem (AWALBP), en el que las estaciones solamente tienen acceso a la porción limitada de las piezas que son visibles dentro de su ventana de accesibilidad.

Para resolver el problema se propone una estrategia que combina una heurística con un modelo de PLEM mejorado. La experiencia computacional realizada reveló un aumento significativo del porcentaje de ejemplares resueltos respecto al modelo anterior.

Las futuras líneas de investigación incluyen la utilización de metaheurísticas y mateheurísticas para tratar de aumentar el número de ejemplares resueltos.

Referencias

- Calleja G, Corominas A, García-Villoria A, Pastor R (2011a) Exact and heuristic approaches for the Visibility Windows Assembly Line Balancing Problem (VWALBP). *Proceedings of the 12th Congrès Annuel de la Société Française de Recherche Opérationnelle et d'Aide à la Décision (ROADEF)*, Saint-Étienne: Vol. II, 583.
- Calleja G, Corominas A, García-Villoria A, Pastor R (2011b) Heurísticas para el Visibility Windows Assembly Line Balancing Problem (VWALBP). XV Congreso de Ingeniería de Organización CIO, Cartagena (pp. 321-328).
- Corominas A, Pastor R (2009) *A MILP model for the Visibility Windows Assembly Line Balancing Problem (VWALBP): the case of Müller-Hanneman & Weihe problem*. Working paper. Retrieved February 22, 2012, from the website: <http://upcommons.upc.edu/eprints/bitstream/2117/7047/1/IOC-DT-P-2009-09.pdf>.
- Müller-Hanneman M, Weihe K (2006) Moving policies in cyclic assembly line scheduling. *Theoretical Computer Science*, 351, (425-436).
- Tazari S, Müller-Hanneman M, Weihe K (2006) Workload balancing in multi-stage production processes. In *Lecture Notes in Computer Science. Proceedings of the 5th International Workshop on Experimental Algorithms, WEA 2006: Vol.4007* (pp. 49-60).